Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Colegio de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas
MATE 4052 – EXAMEN 1 – *Fecha:* Marzo 15, 2017

Instrucciones: **Resuelva exactamente tres de los cinco siguientes problemas. Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. Puede usar y aplicar cualquier resultado discutido en clase, ó demostrado en el libro de texto (excepto si se le indica lo contrario). El examen tiene un valor total de 54 puntos (4 puntos de bono).**

1. (a) *(3 puntos)* Defina *función analítica* sobre $\mathbb{C}$.

(b) *(9 puntos)* Dados (X, d_X), (Y, d_Y), sea $E \subseteq X$, sea Y espacio completo, y sea $\{f_n\}$ una sucsión de funciones $f_n : E \to Y$ con $f_n \xrightarrow{u} f$ sobre E. Dado x un punto límite de E, supongamos que $\lim_{t \to x} f_n(t) = y_n \in Y$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$\lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x} f_n(t).$$

(c) *(6 puntos)* Sea $f \in C([a,b])$. Si

$$\int_a^b x^n f(x)\, dx = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0,$$

pruebe que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

2. (a) *(3 puntos)* Defina una *sucesión* $\{f_n\}$ *de funciones puntualmente acotada*, donde $f_n : (X, d_X) \to \mathbb{C}$.

(b) *(9 puntos)* Dado α una función creciente sobre $[a,b]$, sea $\{f_n\} \subseteq \mathcal{R}_\alpha[a,b]$ con $f_n \xrightarrow{u} f$ sobre $[a,b]$. Demuestre que $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$, con

$$\int_a^b f\, d\alpha = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n\, d\alpha.$$

(c) *(6 puntos)* Sea $\{c_n\}$ una sucesión de números reales positivos, con

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k = L.$$

Pruebe que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = L$; en particular, la serie converge.

3. (a) *(3 puntos)* Defina una sucesión de funciones *uniformemente convergente.*

(b) *(9 puntos)* Dado $K \subseteq (X,d)$ compacto, sea $\{f_n\} \subseteq \mathfrak{C}(K) := \{h \in C(K) \mid h \text{ acotada}\}$ Si $\{f_n\}$ es equicontinua y puntualmente acotada sobre K, demuestre que $\{f_n\}$ contiene una subsucesión uniformemente convergente.

(c) *(6 puntos)* Sea $\{a_{ij}\}$ una doble sucesión de números reales. Si $a_{ij} \geq 0$ para todo i, $j \in \mathbb{N}$, pruebe que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

4. (a) *(3 puntos)* Defina una *sucesión* $\{g_n\}$ *de funciones uniformemente acotada*, donde $g_n : (X, d_X) \to \mathbb{C}$.

(b) *(9 puntos)* Si $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ es una función continua en $[0,1]$, demuestre que existe una sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}$ tal que $P_n(x) \xrightarrow{u} f(x)$ sobre $[0,1]$.

(c) *(6 puntos)* Dado (X,d) compacto, sea $\{f_n\}$ una sucesiones de funciones real-valuadas sobre X, tal que $x_n \to x$ (en X) implica que $f_n(x_n) \to f(x)$ sobre $\mathbb{R}$. Si $f \in C(X)$, pruebe que $f_n \xrightarrow{u} f$ (sobre X).

5. (a) *(3 puntos)* Defina una *familia equicontinua* de funciones compleja-valuadas.

(b) *(9 puntos)* Sea $\{a_{ij}\}$ una doble sucesión de números reales. Si $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i$, y si $\sum b_i$ converge, demuestre que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

(c) *(6 puntos)* Pruebe que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$$

converge uniformemente en todo intervalo acotado, pero no es absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$.