Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Colegio de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas
MATE 4051 – EXAMEN FINAL – *Fecha:* Diciembre 14, 2016

Instrucciones: **Resuelva exactamente tres de los cinco siguientes problemas. Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. Puede usar y aplicar cualquier resultado discutido en clase, ó demostrado en el libro de texto (excepto si se le indica lo contrario). El examen tiene un valor total de 54 puntos (4 puntos de bono).**

1. (a) *(10 puntos)* Dado (X, d), sea $E \subseteq K \subseteq X$. Si K es compacto y E es cerrado (en X) demuestre que E es compacto.

(b) *(8 puntos)* Si $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ con $\displaystyle\int_a^b f\, d\alpha = 0$ para toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotónica, pruebe que $\alpha = c$ es la función constante.

2. (a) *(10 puntos)* Decimos que t es un *punto fijo* de una función f, si $f(t) = t$. Luego, si $f : [a, b] \to [a, b]$ es una función continua en $[a, b]$, pruebe que f tiene al menos un punto fijo en $[a, b]$.

(b) *(8 puntos)* Determine todos los valores de $p \in \mathbb{R}$ en donde la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,[\log(k)]^p}$ converge. Justifique completamente su respuesta.

3. (a) *(10 puntos)* Sea $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión monotónica. Demuestre que $\{a_n\}$ converge si y solamente si $\{a_n\}$ es acotada.

(b) *(8 puntos)* Dado $x_0 \in [a, b]$, sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función, tal que $f(x_0) = 1$, y $f(x) = 0$ para toda $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$. Si α es una función creciente en $[a, b]$, y α es continua en x_0, pruebe que $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ con $\displaystyle\int_a^b f\, d\alpha = 0$.

4. (a) *(10 puntos)* Dado $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, supongamos que $f^{(n-1)}$ es continua en $[a,b]$, y que $f^{(n)}(t)$ existe para cada $t \in (a,b)$. Dados $\alpha,\ \beta \in [a,b],\ \alpha \neq \beta$, definimos

$$P_n(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k\,.$$

Demuestre que existe un número x_0 entre α y β, tal que

$$f(\beta) = P_n(\beta) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\beta-\alpha)^n\,.$$

(b) *(8 puntos)* Sea A un conjunto incontable, y sea $B \subseteq A$ contable. Pruebe que $A \sim A \setminus B$.

5. (a) *(10 puntos)* Demuestre que $C[a,b] \subseteq \mathcal{R}_\alpha[a,b]$.

(b) *(8 puntos)* Si $\{K_n\}$ es una colección de conjuntos compactos en (X,d), pruebe que

$$K := \prod_{j=1}^{n} K_j := K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_n$$

es un conjunto compacto.