Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Colegio de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas
MATE 4052 – TAREA 1 – *Entregar:* Febrero 1, 2017

Apellidos: ______________________ Nombre: ______________________
\# Estudiante: ______________________ Profesor: *Dr. Alejandro Vélez-Santiago*

Instrucciones: **Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. Puede usar y aplicar cualquier resultado discutido en clase, ó demostrado en el libro de texto (excepto si se le indica lo contrario). La tarea tiene un valor total de 58 puntos (4 puntos de bono).**

1. *(2 puntos)* Dados (X, d_X), (Y, d_Y), $D \subseteq E \subseteq X$, sea $\{f_n : E \to Y\}$ una sucasión de funciones uniformemente convergente sobre E. Pruebe que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre D.

2. *(9 puntos)* Dados (X, d_X), (Y, d_Y), $E \subseteq X$, con Y espacio completo, sea $\{f_n\} \subseteq Y \cap C(E)$ una sucesión de funciones (sobre $\overline{E}$), con $f_n \to f$ uniformemente sobre E, y puntualmente sobre $\overline{E}$.

(a) Demuestre que $f \in C(E)$.

(b) ¿Será cierto que $f \in C(\overline{E})$? Pruebe, ó provea un contraejemplo.

(c) Si la condición (b) se cumple, ¿será cierto que $f_n \to f$ uniformemente sobre $\overline{E}$? Pruebe,ó de un contraejemplo.

3. *(3 puntos)* Pruebe que toda sucesión de funciones acotadas que converge uniformemente es uniformemente acotada.

4. *(6 puntos)* Dados (X, d_X), (Y, d_Y), $D \subseteq E \subseteq X$, sean $\{f_n : E \to Y\}$ y $\{g_n : E \to Y\}$ sucesiones de funciones uniformemente convergentes.

(a) Si $h_n := f_n + g_n$, demuestre que $\{h_n\}$ es uniformemente convergente.

(b) Si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son acotadas, y si $k_n := f_n g_n$, pruebe que $\{k_n\}$ converge uniformemente.

5. *(8 puntos)* Definamos dos sucessiones de funciones real valuadas, definidas sobre todo $\mathbb{R}$, como sigue:

$$f_n(x) := x\left(1+\frac{1}{n}\right); \qquad g_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cup \{0\}, \\ b+\frac{1}{n}, & x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}\setminus\{0\},\ a \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\ b \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Luego definimos la sucesión $\{h_n\}$ de funciones, por: $h_n(x) := f_n(x)g_n(x)$.

(a) Demuestre que $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen uniformemente en cada intervalo acotado.

(b) Pruebe que $\{h_n\}$ no converge uniformemente en cualquier intervalo acotado.

6. *(4 puntos)* Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones compleja valuadas. Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente sobre E, y que existe una constante $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in E$, y para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $g \in C(\overline{B(0,M)})$, definamos:

$$h_n(x) := g(f_n(x)), \qquad h(x) := g(f(x)) \qquad (x \in E).$$

Demuestre que $h_n \to h$ uniformemente sobre E.

7. *(8 puntos)* Dado $\phi \in C([0,1])$ con $\phi(1) = 0$, definamos:

$$f_n(x) := x^n, \qquad g_n(x) := x^n\phi(x) \qquad (x \in [0,1]).$$

(a) Pruebe que $\{f_n\}$ converge puntualmente sobre $[0,1]$.

(b) ¿Será cierto que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre $[0,1]$ y/ó sobre $(0,1)$? Pruebe, ó provea contraejemplos.

(c) Demuestre que $\{g_n\}$ converge uniformemente sobre $[0,1]$.

8. *(6 puntos)* Dados (X, d_X), (Y, d_Y), $E \subseteq X$, con Y espacio completo, sea $\{f_n\} \subseteq Y \cap C(E)$ una sucesión de funciones, con $f_n \to f$ uniformemente sobre E. Si $\{x_n\} \subseteq E$ es una sucesión, con $x_n \to x \in E$, demuestre que $f_n(x_n) \to f(x)$. ¿Será cierto el converso de este resultado? Pruebe, ó de un contraejemplo.

9. *(6 puntos)* Sea $f_n(x) := n^\gamma x(1-x^2)^n \qquad (x, \gamma \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$.

(a) Pruebe que $\{f_n\}$ converge puntualmente sobre $[0,1]$, para cada $\gamma \in \mathbb{R}$.

(b) ¿Para qué valores de γ tenemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre $[0,1]$? Justifique completamente su respuesta.

10. *(6 puntos)* Determine si las siguientes sucesiones de funciones convergen puntualmente, y/ó uniformemente sobre $[0, 1]$. Justifique cada respuesta, y demuestre sus aseveraciones.

(a) $f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} x^k(1-x);$ (b) $g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k (1-x).$