Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Colegio de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas
MATE 4051 – TAREA 2 – *Entregar:* Septiembre 16, 2016

Apellidos: ______________________ Nombre: ______________________
Estudiante: ______________________ Profesor: *Dr. Alejandro Vélez-Santiago*

Instrucciones: **Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. Puede usar y aplicar cualquier resultado discutido en clase, ó demostrado en el libro de texto (excepto si se le indica lo contrario). La tarea tiene un valor total de 42 puntos (2 puntos de bono).**

1. *(4 puntos)* Suponga que $A \sim \{1, 2, \ldots, m\}$ y $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$. Pruebe que $m = n$.

2. *(5 puntos)* Demuestre que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es contable, de forma explícita; esto es, construya una función biyectiva entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$.

3. *(5 puntos)* Pruebe que el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales es contable.

4. *(5 puntos)* Sea A un conjunto incontable, y sea $B \subseteq A$ contable. Pruebe que $A \sim A \setminus B$.

5. *(5 puntos)* Un número $z \in \mathbb{C}$ es *algebraico*, si existen números enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k} = 0.$$

Si $S := \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ número algebraico}\}$, demuestre que S es contable.

6. *(5 puntos)* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, y definamos:

$$A := \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \lim_{x \to a} f(x) \text{ existe, y } \lim_{x \to a} f(x) \neq f(a) \right\}.$$

Pruebe que A es a lo más contable.

7. *(8 puntos)* Demuestre que el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales es incontable, de la siguiente forma:

(a) *(3 puntos)* Demuestre que $\mathbb{R} \sim (0,1)$.

(b) *(4 puntos)* Pruebe que $(0,1)$ es incontable.

(c) *(1 punto)* Concluya que $\mathbb{R}$ es incontable.

8. *(5 puntos)* Sea $S := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid D_f = \mathbb{R}\}$. Demuestre que $S \nsim \mathbb{R}$; esto es, demuestre que no existe biyección de S a $\mathbb{R}$.