Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Colegio de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas
MATE 4052 – TAREA 3 – *Entregar:* Febrero 17, 2017

Apellidos: ______________________ Nombre: ______________________
Estudiante: ______________________ Profesor: *Dr. Alejandro Vélez-Santiago*

Instrucciones: **Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. Puede usar y aplicar cualquier resultado discutido en clase, ó demostrado en el libro de texto (excepto si se le indica lo contrario). La tarea tiene un valor total de 35 puntos.**

1. *(5 puntos)* Si K es un espacio métrico compacto, demuestre que K es separable.

2. *(4 puntos)* Sea $f \in C(\mathbb{R})$, y definamos $f_n(x) := f(nx)$. Si $\{f_n\}$ es equicontinua sobre $[0,1]$, ¿qué podemos concluir de la función f? Justifique su respuesta.

3. *(5 puntos)* Sea $\{f_n\}$ una sucesión equicontinua de funciones sobre un conjunto compacto K. Si $\{f_n\}$ converge puntualmente sobre K, pruebe que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre K.

4. *(6 puntos)* Dado K espacio métrico compacto, sea $E \subseteq \mathcal{C}(K)$. Demuestre que E es compacto si y sólo si E es uniformemente cerrado, puntualmente acotado, y equicontinua.

5. *(5 puntos)* Sea $f \in C([0,1])$. Si

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0,$$

pruebe que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

6. *(5 puntos)* Dado α función creciente sobre $[a,b]$, sea $f \in R_\alpha[a,b]$. Demuestre que existe una sucesión $\{P_n\}$ de polinomios reales, tales que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x) - P_n(x)|\,dx = 0.$$

7. *(5 puntos)* Construya explícitamente una sucesión $\{P_n\}$ de polinomios, tales que

$$P_n(x) \xrightarrow{u} \sqrt{x}$$

sobre $[0, 1]$. Justifique completamente cada paso de la construcción.