Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Colegio de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas
MATE 4051 – TAREA 4 – *Entregar:* Octubre 28, 2016

Apellidos: ______________________________ Nombre: ______________________________
\# Estudiante: ______________________________ Profesor: *Dr. Alejandro Vélez-Santiago*

Instrucciones: **Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. Puede usar y aplicar cualquier resultado discutido en clase, ó demostrado en el libro de texto (excepto si se le indica lo contrario). La tarea tiene un valor total de 54 puntos (4 puntos de bono).**

1. *(6 puntos)* Demuestre que un espacio métrico (X, d) es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos E abiertos y cerrados de X son $E = \emptyset$ y $E = X$.

2. *(4 puntos)* Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, pruebe que E es conexo.

3. *(6 puntos)* Suponga que $0 < x_1 < 1$, y defina la sucesión recursiva: $x_{n+1} := 1 - \sqrt{1 - x_n}$. Demuestre que $\{x_n\}$ es decreciente, con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Luego pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}.$$

4. *(4 puntos)* Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones en un espacio métrico (X, d), tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$ en X. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

5. *(5 puntos)* En (X, d), si $E \subseteq X$ es completo, pruebe que E es cerrado.

6. *(4 puntos)* Demuestre que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ de la siguiente forma: dado $x \in \mathbb{R}$, demuestre que existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $x_n \to x$.

7. *(4 puntos)* Sea $\{x_n\}$ sucesión en (X, d), y sea $E_n := \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$. Demuestre que $\{x_n\}$ es sucesión de Cauchy si y solamente si $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(E_n) = 0$.

8. *(8 puntos)* Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales, y definamos:

$$y_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\,, \qquad\qquad z_n := \frac{x_n}{n}\,.$$

(a) *(4 puntos)* Si $x_n \to x$ en $\mathbb{R}$, demuestre que que $y_n \to x$.

(b) *(4 puntos)* Si $(x_{n+1} - x_n) \to x$ en $\mathbb{R}$, pruebe que que $z_n \to x$.

9. *(5 puntos)* Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos sucesiones de Cauchy en (X, d), y definamos $\beta_n := d(x_n, y_n)$. Pruebe que $\{\beta_n\}$ converge en $\mathbb{R}$.

10. *(4 puntos)* Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida como sigue:

$$a_1 = 0; \qquad a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2}; \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n} \qquad\qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Calcule $\limsup_{n\to\infty} a_n$ y $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

11. *(4 puntos)* Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n \quad \text{y} \quad \liminf_{n\to\infty}(-x_n) = -\limsup_{n\to\infty} x_n.$$