Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Colegio de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas
MATE 4052 – TAREA 6 – *Entregar:* A avisarse luego

Apellidos: ______________________ Nombre: ______________________
\# Estudiante: ______________________ Profesor: *Dr. Alejandro Vélez-Santiago*

Instrucciones: **Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. Puede usar y aplicar cualquier resultado discutido en clase, ó demostrado en el libro de texto (excepto si se le indica lo contrario). La tarea tiene un valor total de 50 puntos.**

- Durante toda la tarea, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, y $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$.

1. *(3 puntos)* Si $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ existe para $\mathbf{a} \in E$, demuestre que $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$.

2. *(4 puntos)* Definimos la *derivada direccional de* $\mathbf{f}$ *en* $\mathbf{a} \in E$ *(en la dirección* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$*)* por:

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) := \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{t},$$

si este límite existe. Luego, si $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ existe, pruebe que $\mathbf{f}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})$ existe para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, con

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a})\mathbf{u} = \mathbf{f}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})$$

.

3. *(4 puntos)* Sea $g : E \to \mathbb{R}$ función, tal que $\partial_j g$ es una función acotada sobre E para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Demuestre que $g \in C(E)$.

4. *(3 puntos)* Supongamos que $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ existe para $\mathbf{a} \in E$, y ponemos $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}) \ f_2(\mathbf{x}) \ \cdots \ f_n(\mathbf{x}))^T$ $(\mathbf{x} \in E)$. Si $M := \sum_{j=1}^{n} \|\nabla f_j(\mathbf{a})\|$, demuestre que

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{a})\mathbf{u}\| \ \leq \ M \, \|\mathbf{u}\| \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

En particular, $\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \mathbf{f}'(\mathbf{a})\mathbf{h} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n)$.

5. *(4 puntos)* Sea $\mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función diferenciable (sobre $\mathbb{R}$) tal que $\|\mathbf{h}(t)\| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pruebe que $\mathbf{h}'(t) \cdot \mathbf{h}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

6. *(4 puntos)* Sea $\mathbf{f}$ diferenciable en E, y supongamos que E es convexo. Para cada $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in E$, demuestre que existe $\mathbf{z}$ en el segmento con extremos $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, tal que

$$\mathbf{b} \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})] = \mathbf{b} \cdot [\mathbf{f}'(\mathbf{z})(\mathbf{y} - \mathbf{x})], \qquad \forall\, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

7. *(8 puntos)* Sea $\mathbf{f}$ diferenciable en E, y supongamos que E es conexo.

(a) Si $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = 0_{m\times n}$ para todo $\mathbf{x} \in E$, demuestre que $\mathbf{f}$ es constante sobre E.

(b) Si $\mathbf{f} \in C^{0,\alpha}(E; \mathbb{R}^m)$ para $\alpha > 1$, pruebe que $\mathbf{f}$ es constante sobre E.

8. *(6 puntos)* Para los siguientes problemas, provea un ejemplo de existencia, ó pruebe que no existe: una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:

(a) $g'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) > 0$ para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ fijo, y para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}$.

(b) $g'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) > 0$ para $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ fijo, y para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$.

9. *(6 puntos)* Sea $\mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$\mathbf{h}(t) := (\cos(t)\ \ \mathrm{sen}(t))^T.$$

Tomemos $t_1 = 0$ y $t_2 = 2\pi$. Entonces:

(a) Pruebe que $\mathbf{h}(t_2) - \mathbf{h}(t_1) \neq \mathbf{h}'(s)(t_2 - t_1)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

(b) Dado $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, viendo el problema 6, encuentre explícitamente $s_0 \in [t_1, t_2]$, tal que

$$\mathbf{b} \cdot [\mathbf{h}(t_2) - \mathbf{h}(t_1)] = \mathbf{b} \cdot [\mathbf{h}'(s_0)(t_2 - t_1)].$$

10. *(5 puntos)* Definamos

$$g(t) := t + 2t^2\,\mathrm{sen}(1/t) \text{ si } t \neq 0; \qquad g(0) = 0.$$

Demuestre que g es diferenciable con derivada acotada sobre todo intervalo abierto de 0, pero g no es inyectiva sobre tales intérvalos.

11. *(3 puntos)* Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por:

$$h(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3x^2 + 3y^2.$$

Sea $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) = 0\}$. Encuentre todos los puntos en D tales que no existe una vecindad en donde la ecuación $f(x, y) = 0$ se pueda resolver para y en términos de x, ó para x en términos de y.