Copa Eugene Francis 21 de abril de 2012

P1) (3 minutos)
Una entrevista a 40 consumidores encontró que 12 prefieren la marca X, 23 prefieren la marca Y y el doble de los clientes que prefieren ambas marcas, no prefieren ninguna de estas dos marcas. ¿Cuántos clientes prefieren ambas marcas?

A survey of 40 costumers found that 12 liked brand X, 23 liked brand Y, and twice as many disliked both brands as liked both brands. How many liked both brands?

Solución:

Sea x: el número de consumidores que prefieren ambas marcas
Luego, 2x = número de consumidores que NO prefiere ninguna de las dos marcas

$12 + 23 - x + 2x = 40$
$x = 5$

P2) (4 minutos)

El testamento de un millonario lee: “Le dejo 4/17 de mi fortuna a mi hijo, 7/13 del restante a mi esposa, 2/3 de este nuevo restante a mi hija y los restantes \$2,000,000 a mi perro. ¿Cuánto era el total de dinero de la herencia?

The will of a millionaire reads as follows: “I leave 4/17 of my estate to my son, 7/13 of the remainder to my wife, 2/3 of this remainder to my daughter, and the remaining \$2,000,000 to my dog.” What was the total amount of the estate?

Solución:

Sea x: total de dinero de la herencia

La esposa hereda: $\frac{7}{13}(x-\frac{4}{17}x)=\frac{7}{17}x$

La hija hereda: $(x-\frac{4}{17}x-\frac{7}{17}x)=\frac{4}{17}x$

Luego:

$$x-\frac{4}{17}x-\frac{7}{17}x-\frac{4}{17}x-2,000,000=0$$

$$x=\$17,000,000$$

P3) (3 minutos)
Resolver la ecuación: $\log_5(x) + \log_3(x) = 1$

Solve the equation: $\log_5(x) + \log_3(x) = 1$
Solución:

Aplicando cambio de bases

$$\frac{\ln(x)}{\ln(5)} + \frac{\ln(x)}{\ln(3)} = 1$$

$$\ln(x)\left(\frac{1}{\ln(5)} + \frac{1}{\ln(3)}\right) = 1$$

$$\ln(x)\left(\frac{\ln(5) + \ln(3)}{\ln(5)\ln(3)}\right) = 1$$

$$\ln(x) = \frac{\ln(5)\ln(3)}{\ln(15)}$$

$$x = e^{\frac{\ln(5)\ln(3)}{\ln(15)}}$$

P4) (4 minutos)

Expresar en notación de intervalos el dominio de la función:

Express in interval notation de domain of the function:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ln(x)}}$$

Solución:

$$\mathrm{dom}_{\mathrm{f}} = \left\{ x : x > 0,\ \ \ln(x) \neq 0,\ 1 + \frac{1}{\ln(x)} \neq 0 \right\}$$

$$\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$1 + \frac{1}{\ln(x)} = 0 \Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$\mathrm{dom}_{\mathrm{f}} = \left(0, \frac{1}{e} \right) \cup \left(\frac{1}{e}, 1 \right) \cup \ 1, \infty$$

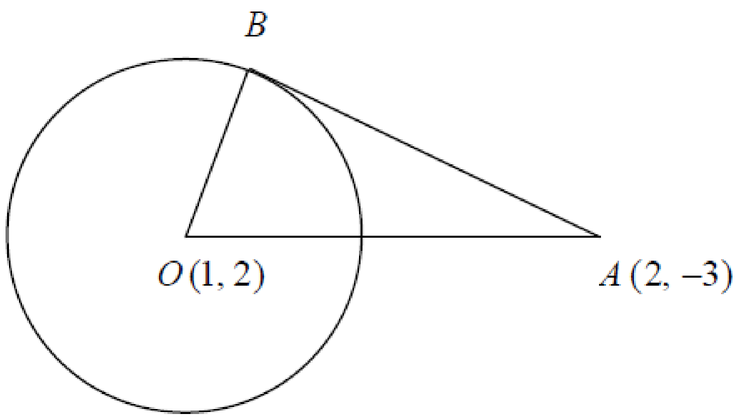
Copa Eugene Francis 21 de abril de 2012

P5) (5 minutos)

Si una recta tangente es trazada desde el punto (2,-3) hasta el círculo $x^2+ y^2-2x-4y-1=0$, determine la distancia desde (2,-3) hasta el punto de tangencia.

If a tangent line is drawn from the point (2,-3) *to the circle* $x^2+ y^2-2x-4y-1=0$, *find the distance from (2,-3) to the point of tangency.*

Solución:



Completando el cuadrado, la ecuación del círculo se expresa:

$(x-1)^2+(y-2)^2=6$

círculo con centro O = (1,2) y radio = $\sqrt{6}$

La distancia desde A(2,-3) al centro O = (1,2) es: $\sqrt{26}$

Sea B el punto de tangencia

el triángulo ABO es un triángulo rectángulo

aplicando el teorema de Pitágoras:

AB $=\sqrt{(\mathrm{AO})^2-(OB)^2}=\sqrt{26-6}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

P6) (3 minutos)

La razón de un ángulo interior de un polígono regular a un ángulo exterior es 8 a 1. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular?

The ratio of an interior angle of a regular polygon to an exterior angle is 8 to 1. How many sides does the polygon have?

Solución:

Sea x: medida en grados de un ángulo interior del polígono

luego

$$x + \frac{1}{8}x = 180^\circ$$

$$x = 160^\circ$$

Sea n: número de lados del polígono

$$\frac{n-2}{n}180^\circ = 160^\circ$$

$n = 18$ lados

P7) (4 minutos)
La base de un triángulo es 40 pies y uno de los ángulos de la base es 60 grados. La suma de la medida de los otros dos lados es 45 pies. ¿Cuánto mide el lado más corto del triángulo?

The base of a triangle is 40 feet and one of the base angles is 60 degrees . The sum of the other two sides is 45 feet. What is the measure of the shortest side of the triangle?

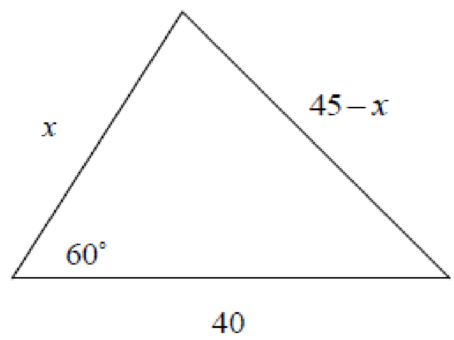
Solución:

$$(45-x)^2 = x^2 + 40^2 - 2(40)x\cos 60^\circ$$

$$2025 - 90x + x^2 = x^2 + 1600 - 40x$$

$$50x = 425$$

$$x = 8.5$$



P8) (5 minutos)

If (Si) $f_1(x) = \dfrac{1}{2-x}$

$f_2 = f_1 \circ f_1$

$f_3 = f_1 \circ f_2$

$f_4 = f_1 \circ f_3$

Find (determine) $f_{101}(3)$

Solución:

$$f_1(3) = \frac{1}{2-3} = -1 \quad ; \quad f_2(3) = \frac{1}{2--1} = \frac{1}{3}$$

$$f_3(3) = \frac{1}{2-\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} \quad ; \quad f_4(3) = \frac{1}{2-\frac{3}{5}} = \frac{5}{7}$$

...

Aplicando inducción matemática, demostremos que:

$f_k(3) = \dfrac{2k-3}{2k-1}$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$

claramente se cumple para k = 1

Asumir: $f_k(3) = \dfrac{2k-3}{2k-1}$

$$f_{k+1}(3) = \frac{1}{2-\frac{2k-3}{2k-1}} = \frac{1}{\frac{(4k-2)-(2k-3)}{2k-1}} = \frac{2k-1}{2k+1} = \frac{2(k+1)-3}{2(k+1)-1}$$

Se cumple para $k+1$

Luego

$$f_{101}(3) = \frac{2(101)-3}{2(101)-1} = \frac{199}{201}$$

P9) (5 minutos)

Si $f(2x+1)=4x^2+2x-6$, determine la suma de los ceros de $f(x)$

If $f(2x+1)=4x^2+2x-6$, find the sum of the zeros of $f(x)$

Solución:

$f(2x+1)=4x^2+2x-6$

$=4x^2+2x+(2x-2x)+(1-1)-6$

$=(4x^2+4x+1)-(2x+1)-6$

$=(2x+1)^2-(2x+1)-6$

Luego

$f(x)=x^2-x-6$

Recordando que si $f(x)=x^2+bx+c= \ x-\alpha \ \ (x-\beta)$

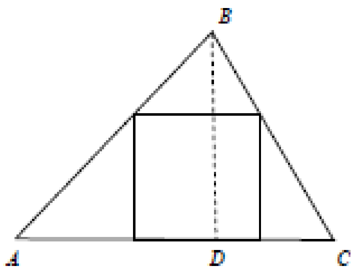
$f(x)=x^2+bx+c=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

esto es: el coeficiente de la variable lineal es el opuesto de la suma de los ceros

La suma de los ceros es: $-(-1)\ =1$

P10) (5 minutos)
En la siguiente figura del ΔABC se tiene que: AB=15, BC=13, AC=14 y BD es la altura del ΔABC. Determine el perímetro del cuadrado inscrito en el triángulo.

In the following figure for ΔABC we have: AB=15, BC=13, AC=14 and BD is the height of ΔABC. Determine the perimeter of the square inscribed in the triangle.



Solución:

Aplicando la fórmula de Herón:

Area del triángulo = $\sqrt{21(8)(7)(6)} = 84$

Además

Area del triángulo $= \frac{1}{2} 14(\text{altura})$

altura $= \frac{84}{7} = 12$

Area del triángulo = área del cuadrado + área de 3 triángulos menores

sea x: medida del lado del cuadrado

Area del triángulo= $x^2 + \frac{1}{2} x(12 - x) + \frac{1}{2} 2x \frac{1}{2}(14 - x)$

Area del triángulo = $x^2 + 6x - \frac{x^2}{2} + 7x - \frac{x^2}{2} = 13x$

$84 = 13x$

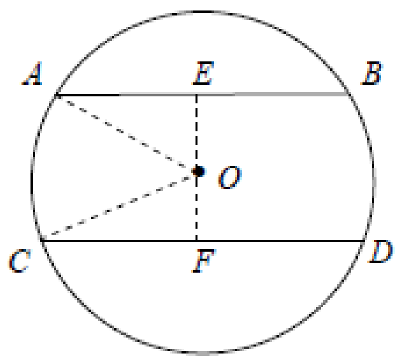
perímetro del cuadrado = 4x = $\frac{336}{13}$

Copa Eugene Francis 21 de abril de 2012

Desempate (6 minutos)

En la siguiente figura O es el centro del círculo. AB = 40 y CD = 48 son dos cuerdas en el círculo. AB es paralela a CD y la distancia entre ellas es 22. Hallar el radio del círculo.

In the following figure, O is the center of the circle. AB = 40 and CD = 48 are two chords in the circle. AB is parallel to CD and the distance between them is 22. Find the radius of the circle.



Sol:

Let x be the length of the radius. $OE \perp AB$ and $OF \perp CD$. Let $OE = y$. Then, $OF = 22 - y$.

By the Pythagorean Theorem

$$\begin{cases} 20^2 + y^2 = x^2 \\ 24^2 + (22-y)^2 = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 400 + y^2 = x^2 & (1) \\ 1060 - 44y + y^2 = x^2 & (2) \end{cases}$$

$(2) - (1)$

$660 - 44y = 0$, $y = 15$ and $x = 25$.