Universidad de Puerto Rico — Recinto Universitario de Mayagüez — Departamento de Matemáticas

MATE3031.0506.1 — SOLUCIONES EXAMEN I — 6 de septiembre de 2005

Nombre____________________ Número de Estudiante____________________

Profesor____________________ Sección____________________

NOTA: Por razones de conveniencia y brevedad, usamos "aritmética extendida" en la evaluación de los límites con ∞.

1. [12 puntos] Llenar los blancos. Se corrige sólo la respuesta.

a. $\lim_{x\to 1}\left(5x^2+3x+2\right) = 5(1)^2+3(1)+2 = \boxed{10}$

b. $\lim_{x\to \pi}(3\sin x+2\cos x) = 3\sin\pi+2\cos\pi = 3(0)+2(-1) = \boxed{-2}$

c. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+e^x}\right) = \frac{1}{1+e^\infty} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$

d. $\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{x}{x-5}\right) = \frac{5^+}{5^+-5} = \frac{5}{0^+} = \boxed{\infty}$

e. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3e^x+2}{4e^{2x}+1}\right) = \frac{3e^0+2}{4e^{2(0)}+1} = \frac{3(1)+2}{4(1)+1} = \frac{5}{5} = \boxed{1}$

f. La función $f(x)=10\sin(3x-\pi)$ es continua en el/los intervalo(s) $\boxed{(-\infty,\infty)}$

2. [40 puntos] Evaluar estos límites usando algún procedimiento apropiado.

a.
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{x^4-8x}{x^2+x-6} &= \lim_{x\to 2}\frac{x(x^3-8)}{(x+3)(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+3)(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2}\frac{x(x^2+2x+4)}{(x+3)} \\
&= \frac{2(2^2+2(2)+4)}{(2+3)} = \frac{2(4+4+4)}{5} = \boxed{\frac{24}{5}}
\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2}{x-1}-\frac{4x^2-1}{2x}\right] &= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2(2x)}{(x-1)(2x)}-\frac{\left(4x^2-1\right)(x-1)}{2x(x-1)}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2(2x)-\left(4x^2-1\right)(x-1)}{2x(x-1)}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^3-\left(4x^3-4x^2-x+1\right)}{2x^2-2x}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^3-4x^3+4x^2+x-1}{2x^2-2x}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^2+x-1}{2x^2-2x}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{2}{x}}\right] \\
&= \frac{4+0-0}{2-0} = \boxed{2}
\end{aligned}$$

c. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2x+7}-3\right)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2x+7}\right)^2-3^2}{(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2x+7-9}{(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{2x+7}+3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2(1)+7}+3} = \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{2}{3+3} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

d. $$\lim_{x\to\infty}\frac{10x^5-1}{2x^3+3x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{10x^5}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{10x^2-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{3}{x^2}}\right)$$

$$= \frac{\infty-0}{2+0} = \boxed{\infty}$$

e. (algunos) $$\lim_{x\to\infty}\left[\ln(5x)-\ln(3x^2+7)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\frac{5x}{3x^2+7}\right)\right]$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{5x}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{7}{x^2}}\right)\right]$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{5}{x}}{3+\frac{7}{x^2}}\right)\right]$$

$$= \ln\left(\frac{0^+}{3+0^+}\right)$$

$$= \ln(0^+) = \boxed{-\infty}$$

3. [6 puntos]

Hallar el valor de a que hace que la función $f(x)=\begin{cases} x+a^2, & x<1 \\ \dfrac{2a}{x^2}, & x\ge 1 \end{cases}$ sea continua en el intervalo $(-\infty,\infty)$.

Para cualquier valor de a, esta función es continua en los intervalos $(-\infty,1)$ y $[1,\infty)$, porque es una función lineal para $x<1$ y una función potencia para $x\ge 1$. La única posible discontinuidad es en $x=1$. Nos aseguramos de que sea continua en $x=1$ tambien con el requisito de la definición de continuidad en $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(x+a^2\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2a}{x^2}\right)$$

$$1+a^2 = \frac{2a}{1^2}$$

$$1+a^2 = 2a$$

$$a^2-2a+1=0$$

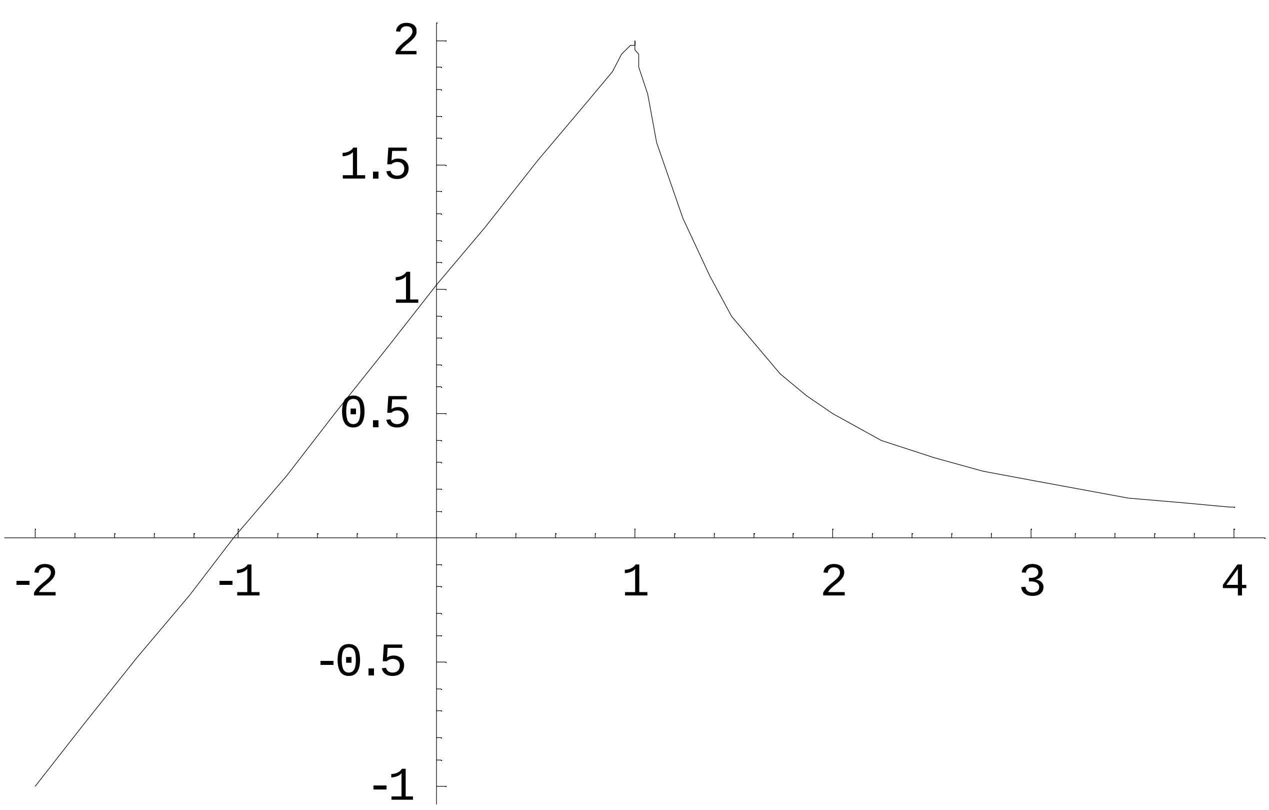
$$(a-1)^2=0$$

$$\boxed{a=1}$$

Con este valor de a, la función es: $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ \dfrac{2}{x^2}, & x\ge 1 \end{cases}$, y vemos que efectivamente:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2$$

La gráfica de esta función es:



4. [6 puntos] Usar la definición formal de límite para demostrar que $\lim_{x\to 1}(2x+3)=5$.

Primero, dado ε, hallar δ.

Sea $\varepsilon > 0$: se requiere

$$|f(x)-L| < \varepsilon$$
$$|(2x+3)-5| < \varepsilon$$
$$|2x-2| < \varepsilon$$
$$2|x-2| < \varepsilon$$
$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto debemos tomar $\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{2}}$ en la demostración formal.

Demostración formal:

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{2}}$.

Entonces:

$$0 < |x-1| < \delta$$
$$\Rightarrow\ 2|x-1| < 2\delta$$
$$\Rightarrow\ 2|x-1| < 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$\Rightarrow\ 2|x-1| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow\ |2x-2| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |(2x+3)-5| < \varepsilon$$

5. [10 puntos] La posición de una partícula es dada por $s(t)=10t^2$. Hallar la velocidad instantánea de la partícula en el momento $t=1$, usando la definición.

$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$
$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{10(t+h)^2-10t^2}{h}$$
$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{10\left(t^2+2th+h^2\right)-10t^2}{h}$$
$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{10t^2+20th+10h^2-10t^2}{h}$$
$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{20th+10h^2}{h}$$
$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{h\left(20t+10h\right)}{h}$$
$$v(t) = \lim_{h\to 0}\left(20t+10h\right)$$
$$v(t) = 20t$$
$$v(1) = 20(1) = \boxed{20}$$

6. [10 puntos] Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\frac{1}{x}$ en el punto $x=2$, usando la definición.

La ecuación de la recta tangente es $y=f(a)+f'(a)(x-a)$, con $f(x)=\frac{1}{x}$, $a=2$, $f(a)=f(2)=\frac{1}{2}$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}\right)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1(x)}{(x+h)(x)}-\frac{1(x+h)}{x(x+h)}\right)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1(x)-1(x+h)}{(x+h)(x)}\right)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{x-(x+h)}{h(x+h)(x)}\right)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{x-x-h}{h(x+h)(x)}\right)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{-h}{h(x+h)(x)}\right)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{(x+h)(x)}\right)$$

$$f'(x)=\frac{-1}{(x+0)(x)}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-1}{x^2}}$$

La pendiente de la recta tangente en $x=2$ es: $\boxed{m_{\tan}=f'(2)=\frac{-1}{2^2}=-\frac{1}{4}}$

La ecuación de la recta tangente es: $y=f(a)+f'(a)(x-a)$

$$y=f(2)+f'(2)(x-2)$$

$$y=\frac{1}{2}+-\frac{1}{4}(x-2)$$

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)$$

$$\boxed{y=-\frac{1}{4}x+1}$$

7. [16 puntos] Análisis y gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2}$

a. Intervalos en donde $f(x)$ es continua: $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$

b. Ceros de $f(x)$: $3x - 1 = 0 \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}}$

c. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{3(0^-)-1}{(0^-)^2} = \dfrac{0-1}{0^+} = \dfrac{-1}{0^+} = \boxed{-\infty}$

d. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{3(0^+)-1}{(0^+)^2} = \dfrac{0-1}{0^+} = \dfrac{-1}{0^+} = \boxed{-\infty}$

e. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = 0 - 0 = \boxed{0}$

f. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{3x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = 0 - 0 = \boxed{0}$

g. Ecuaciones de las asíntotas verticales: $\boxed{x = 0}$

h. Ecuaciones de las asíntotas horizontales: $\boxed{y = 0}$

i. $f(x) > 0$ en el/los intervalos: $\boxed{\left(\frac{1}{3}, \infty\right)}$

j. $f(x) < 0$ en el/los intervalos: $\boxed{(-\infty, 0), \quad \left(0, \frac{1}{3}\right)}$

k. Graficar $f(x)$ aquí cuidadosamente. Debes indicar los interceptos y asíntotas claramente en tu gráfica.