U.P.R. Departamento de Ciencias Matemáticas RUM
MATE 3031 Primer Examen Parcial 6 de septiembre de 2007

Nombre: ____________________________ Sección:____
Profesor: __________________________

Instrucciones: Lea cada pregunta minuciosamente y muestre todo su trabajo. Está prohibido consultar con otro(a) estudiante durante el examen o copiar.

1. [20 puntos] Resuelva los siguientes ejercicios

   (a) el valor de $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^2-x}{x-1} =$ ___1__

   $$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\longrightarrow 1} x = 1$$

   (b) el valor de $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h} =$ ___$\frac{1}{4}$__

   $$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \overset{\text{racionalizando}}{=} \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h}\frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{4+h-4}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}$$
   $$= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)} = \frac{1}{4}$$

   (c) la pendiente (use la definición dada en clase) de la recta tangente a la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ en el punto $(2, 1/2)$ es __-$\frac{1}{4}$___

   $$m = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{2-(2+h)}{2h(2+h)}$$
   $$= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{-h}{2h(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

   (d) el valor de δ tal que si $|x-2| < \delta$ entonces $|4x-8| < \varepsilon$ donde $\varepsilon = 0.1$ es __0.025___

   Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que $|f(x)-L| < \varepsilon$ siempre que $|x-a| < \delta$,
   en nuestro caso: $f(x)-L = 4x-8$, $a = 2$, por lo tanto
   $|4x-8| < \varepsilon$ es equivalente a $|4(x-2)| < \varepsilon$ lo que implica que $|x-2| < \frac{\varepsilon}{4} = \delta$
   como $\varepsilon = 0.1$ entonces $\delta = \frac{0.1}{4} = 0.025$

   (e) el punto de discontinuidad de $f(x) = \ln\left|\frac{1}{2}x-1\right|$ es __2___

   la función logaritmo es continua en todos su dominio, por lo tanto f es discontinua cuando $\frac{1}{2}x-1 = 0 \Rightarrow x = 2$

2. Evaluar los siguientes límites

   (a) (6 puntos) $\lim\limits_{x\longrightarrow -2} \dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$

   $$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{2x^2+3x-2}{x+2} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{(2x-1)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\longrightarrow -2} (2x-1) = -5$$

(b) (8 puntos) $\lim\limits_{x\longrightarrow 3} \dfrac{\left|\frac{1}{3}x-1\right|}{\frac{1}{3}x-1}$

debemos calcular límites laterales, por que $\left|\frac{1}{3}x-1\right| = \begin{cases} \frac{1}{3}x-1, & \text{si } \frac{1}{3}x-1\geq 0 \\ -\left(\frac{1}{3}x-1\right), & \text{si } \frac{1}{3}x-1<0 \end{cases}$ es decir,

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{-\left(\frac{1}{3}x-1\right)}{\frac{1}{3}x-1} = -1$$
$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{\left(\frac{1}{3}x-1\right)}{\frac{1}{3}x-1} = 1$$

como los límites laterales son diferentes, el $\lim\limits_{x\longrightarrow 3} \dfrac{\left|\frac{1}{3}x-1\right|}{\frac{1}{3}x-1}$ no existe

(c) (6 puntos) En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ se tiene que $1-x^2\leq f(x)-3\leq \cos x$ para todo valor de x en dicho intervalo, halle $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$

aplicando el teorema del emparedado, calculamos los límites de las cotas inferiores y superiores, respectivamente,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left(1-x^2\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \cos x = 1 \end{cases} \quad \text{por lo tanto } \lim_{x\longrightarrow 0} (f(x)-3) = 1 \Rightarrow \lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = 4$$

3. [10 puntos] Halle los valores de a y b tal que la función

$f(x) = \begin{cases} ax^2-bx-2 & \text{si } x<2 \\ ax & \text{si } 2\leq x<3 \\ 3bx-3a & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ sea continua en el intervalo $(-\infty,\infty)$

la función tiene que cumplir las condiciones de continuidad en $x=2$ y $x=3$, es decir,

$x=2: f(2) = 2a$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} \left(ax^2-bx-2\right) = 4a-2b-2 = 2a = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} ax$

$x=3: f(3) = 6b-3a$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} ax = 3a = 9b-3a = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} (3bx-3a)$

para hallar los valores de a y b resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4a-2b-2=2a \\ 3a=9b-3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a-2b=2)(-3) \\ 6a-9b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3b=-6 \\ b=2 \end{cases} \text{ y } a=3$$

los valores de a y b son 3 y 2, respectivamente.

4. [5 puntos] .Utilice el teorema del valor intermedio para localizar una raíz de la ecuación $x^3-x^2+2x+3=0$ en un intervalo de longitud 1

identificamos la función $f(x)=x^3-x^2+2x+3$ y para localizar una raíz debemos identificar un intervalo (a,b) que contenga un valor c tal que $f(c)=0$, en nuestro caso, hallamos a y b tal que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos, es decir,

$a=-1, f(-1)=-1$

$b=0, f(0)=3$

por lo tanto, el intervalo de longitud 1 que contiene una raíz de la ecuación es $(-1,0)$

5. Considere la función $f(x)=x^2+5$

(a) [5 puntos] halle $f'(1)$ usando la definición de derivada

$$f'(1) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{(1+h)^2+5-\left(1^2+1\right)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1+2h+5-(1+5)}{h}$$
$$= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2$$

(b) [6 puntos] use el resultado anterior para hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1,6)$

la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,6)$ es dada por
$y-6=f'(1)(x-1)=2(x-1)$ o $y=2x+4$

6. [4 puntos] El desplazamiento de una partícula es dado por $s=\dfrac{1}{5t+1}$, encuentre la velocidad promedio de la partícula desde $t=1$ a $t=5$ segundos.

$$v_p[1,5]=\frac{s(5)-s(1)}{5-1}=\frac{\dfrac{1}{25+1}-\dfrac{1}{5+1}}{4}=\frac{-20}{4\times 6\times 26}=-3.2051\times 10^{-2}$$

7. Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2}$, se pide

(a) [2 puntos] halle el dominio de la función f

$f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2}=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x+2)(x+1)}$
$Dom(f)=\mathbb{R}-\{-2,-1\}$

(b) [2 puntos] halle las asíntotas verticales de la gráfica de la función f

las posibles asíntoas verticales son $x=-2$ y $x=-1$, calculamos los límites cuando x se a cerca a dichos valores
$\lim\limits_{x\longrightarrow -1}\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x+2)(x+1)}=-4$ y por lo tanto $x=-1$ no es una asíntoas vertical

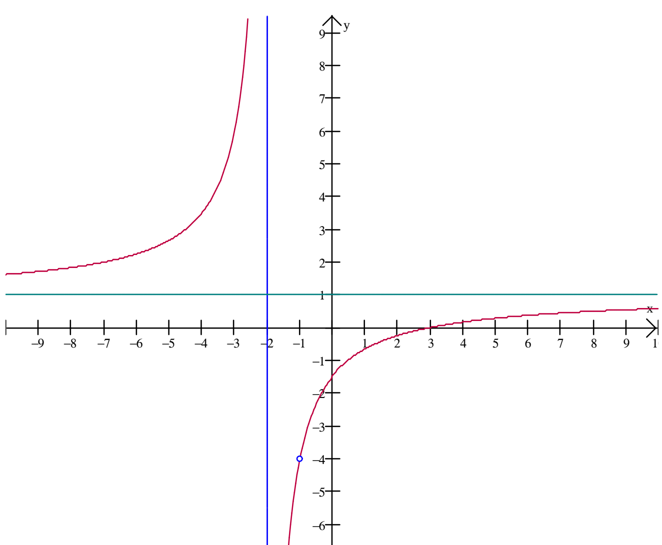
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow -2^-}\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x+2)(x+1)}=\frac{-5}{0^-}=\infty\\ \lim\limits_{x\longrightarrow -2^+}\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x+2)(x+1)}=\frac{-5}{0^+}=-\infty\end{cases}$$ por lo tanto $x=-2$ es una asíntoas vertical

(c) [3 puntos] halle las asíntotas horizontales de la gráfica de la función f

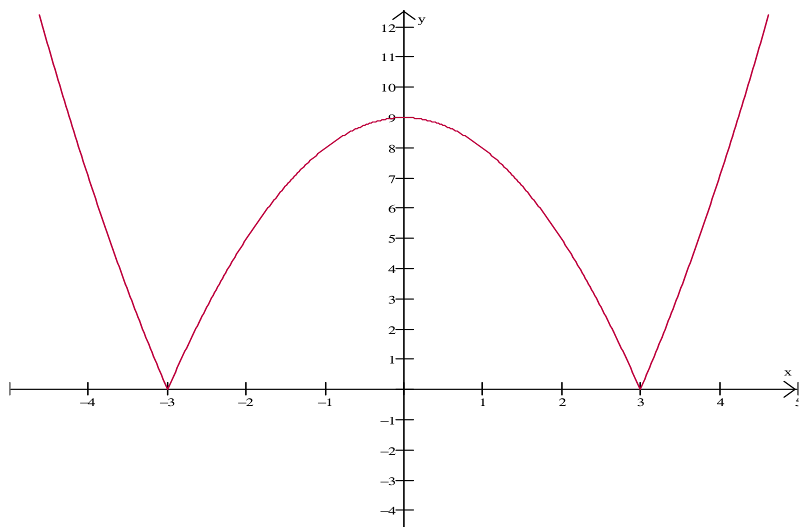
calculamos los límites cuando x se a cerca a ∞ y -∞,

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty^-}\dfrac{(x^2-2x-3)/x^2}{(x^2+3x+2)/x^2}=\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty^-}\dfrac{1-2/x-3/x^2}{1+3/x+2/x^2}=1\\ \lim\limits_{x\longrightarrow \infty^-}\dfrac{(x^2-2x-3)/x^2}{(x^2+3x+2)/x^2}=\lim\limits_{x\longrightarrow \infty^-}\dfrac{1-2/x-3/x^2}{1+3/x+2/x^2}=1\end{cases}$$ por lo tanto $y=1$ es una asíntoas horizontal

(d) [6 puntos] trace la gráfica de la función f indicando sus interceptos



8. [4 puntos] La gráfica de la función $f(x) = |9 - x^2|$ se muestra a continuación, indique los puntos en que no existe la derivada de f



la función no es diferenciable en $x = \pm 3$ ya que su gráfica presenta puntos angulosos para dichos valores de x, es decir, sus derivadas no existen.

9. [9 puntos] Trace la gráfica de una función que satisface las siguientes propiedades:

$f(0) = -1$; $f'(0) = 0$; $f(4) = 3$;;$f'(4) = 0$;, $f'(x) < 0$ para $x < 0$; $f'(x) > 0$ para $0 < x < 4$; $f'(x) < 0$ para $x > 4$

una solución es