Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Departamento de Ciencias Matemáticas

Examen I
Mate 3031 Cálculo I
8 de septiembre de 2008

Nombre ______________________________ *Número de estudiante* ______________

Sección ______________ *Profesor* ________________________

Debe mostrar todo su trabajo. No se dará puntos por solo respuesta. No se puede usar ningún tipo de calculadora.

1. Resolver las siguientes preguntas. [20 puntos]

a) $$\lim_{x->1} 2\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} * \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} 2\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} 2\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

b) $$\lim_{x->\infty} \frac{\sqrt{x^6 - x + 1}}{x^3 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^6 - x + 1}}{\sqrt{x^6}}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^6}{x^6} - \frac{x}{x^6} + \frac{1}{x^6}}}{1 + \frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}}}{1 + \frac{2}{x^3}} = \frac{\sqrt{1-0+0}}{1+0} = 1$$

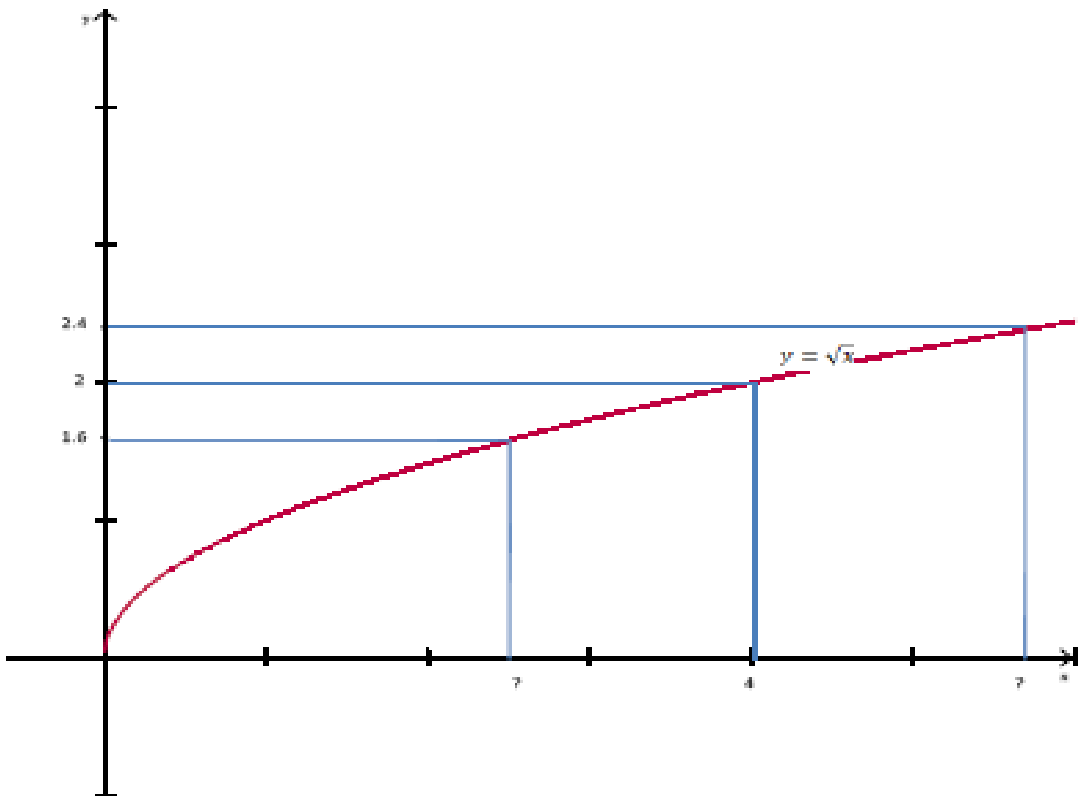
Hay que dividir entre x^3 en el radical hay que usar $\sqrt{x^6}$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{2+x^{-1} - 2^{-1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2-(2+x)}{(2+x)(2)} * \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{(2+x)(2)} * \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{(2+x)(2)} = \frac{-1}{4}$$

d) Hallar δ tal que si $|x-3| < \delta$ entonces $\left|\frac{x}{3} - 1\right| < 0.2$

$$\left|\frac{x-3}{3}\right| < 0.2$$
$$\frac{|x-3|}{3} < 0.2$$
$$|x-3| < 0.6$$
$$\therefore \partial = 0.6$$

e) Use la grafica de f(x) = $\sqrt{x}$ para hallar δ tal que si $|x-4|<\delta$ entonces $\left|\sqrt{x}-2\right| \le 0.4$



$$y=\sqrt{x}$$
$$1.6=\sqrt{x_1}$$
$$x_1=(1.6)^2=2.56$$
$$2.4=\sqrt{x_2}$$
$$x_2=(2.4)^2=5.76$$
$$\partial_1=4-2.56=1.44$$
$$\partial_2=5.76-4=1.76$$
$$\partial=\min\{\partial_1,\partial_2\}=1.44$$

2. Si $y=\dfrac{3x^2+7x+2}{x^2-4}$ **su dominio es** $x\neq\pm 2$

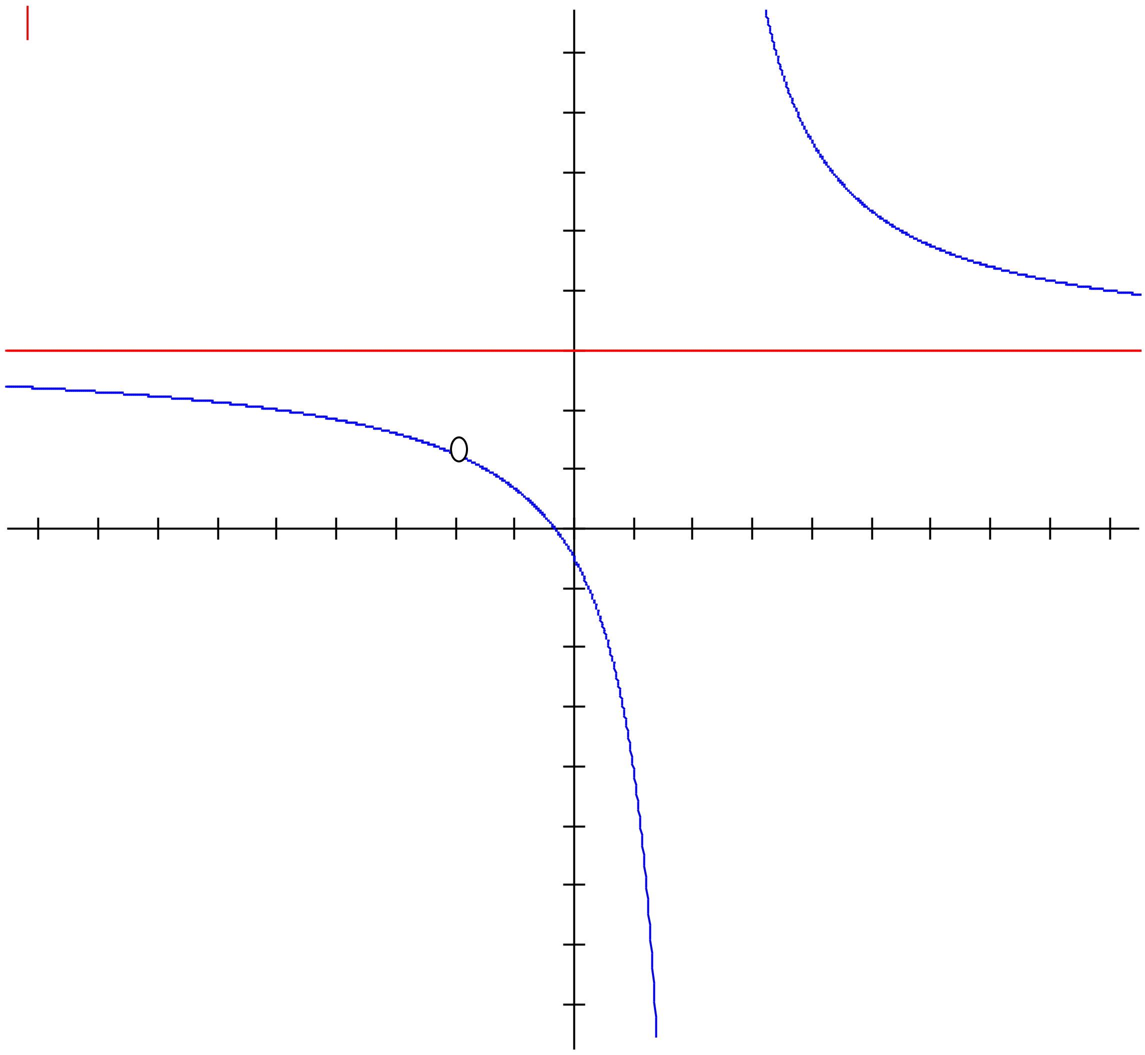
a) Hallar las asíntotas verticales y horizontales. **[4 puntos]**

$$y=\frac{3x^2+7x+2}{x^2-4}=\frac{(3x+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{3x+1}{x-2}$$

x=-2 es discontinuidad removible y en **x = 2, f(x) tiene asíntota vertical .**

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x-2}=3,\quad y=3\ es$ **asíntota horizonta**

b) Graficar **[6 puntos]**



Nota: la gráfica debe tener un **punto abierto en (-2 , f(-2))**

3. Hallar $\lim_{x\to 3} f(x)$ **si** $0 \le f(x) - 1 \le (x-3)^2$ **para** $x \ne 3$**. [7 puntos]**

$$1 \le f(x) \le (x-3)^2 + 1$$

$$1 \le f(x) \le x^2 - 6x + 10$$

$$\lim_{x\to 3} 1 = 1, \quad \lim_{x\to 3} x^2 - 6x + 10 = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x) = 1$$

4. Dado que f y g son funciones continuas, además $f(2) = 2$ **y** $\lim_{x\to 2}\left[2f(x) - g(x)\right] = 2$, **encuentre el valor de** $g(2)$**. [6 puntos]**

$$2\lim_{x\to 2} f(x) - \lim_{x\to 2} g(x) = 2$$

$$a) \quad \lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 2$$

$$b) \quad \lim_{x\to 2} g(x) = g(2)$$

$$2(2) - g(2) = 2$$

$$g(2) = 2$$

5. ¿Para qué valor de 'a' es la función f(x) continua en $(-\infty,\infty)$ [8 puntos]

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & si\ x < 1 \\ x^3 - ax & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} ax^2 + 2x = \lim_{x\to 1^+} x^3 - ax$$

$$a + 2 = 1 - a$$

$$a + a = 1 - 2$$

$$2a = -1$$

$$a = \frac{-1}{2}$$

6. Encuentre, si existe, el límite indicado: [16 puntos]

a) $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1} 1/x = \tan^{-1}(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}) = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{|x-1|} = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} x+1 = 2 \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} -(x+1) = -2 \end{cases}$

no existe el límite en x = 1

c) Considere la función $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$. Encuentre el valor de $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\lim_{x\to 0^+} 1}{\lim_{x\to 0^+} 1 + e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

d) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^4-16} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \lim_{x\to -2} \frac{(x^2-2x+4)}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{12}{-4(8)} = \frac{-3}{8}$

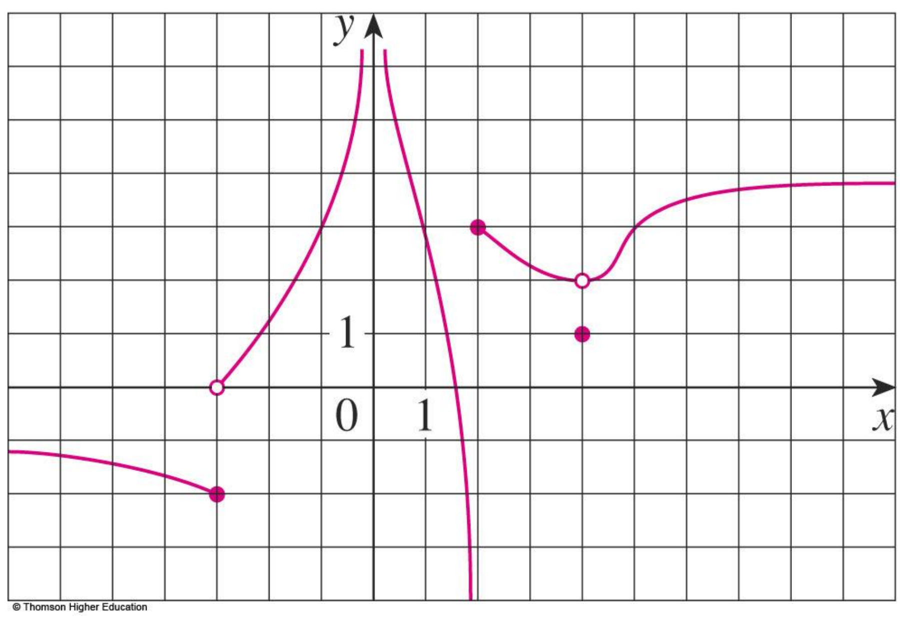
7. Hallar un intervalo donde la función F(x) = 3Sin(x) – 2Cos(x) tiene al menos una raíz. Justifique su contestación enunciando el Teorema del Valor Intermedio y explicando para este caso porqué se cumplen las condiciones del teorema. [8 puntos],

$$F(0) = 3\sin(0) - 2\cos(0) = 3(0) - 2(1) = -2$$

$$F(\pi/4) = 3\sin(\pi/4) - 2\cos(\pi/4) = 3(.707) - 2(.707) = .707$$

F(0) es negativo y F($\pi/4$) es negativo y la función F(x) es continua, por tanto debe cruzar el eje de x en un valor entre o y Pi/4, tiene una raíz allí. Un intervalo que satisface es [0, Pi/4]

8. Sea f(x) una función que tiene la gráfica que aparece en el dibujo: [6 puntos]



Hallar:

a) no existe $\lim_{x \to -3} f(x)$:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) \neq \lim_{x \to -3^+} f(x)$$

$$-2 \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 2$$

$$f(4) = 1$$

b) Determine los intervalos de continuidad de f(x)

(-7, -3](-3, 0) (0, 2)[2 , 4)(4 , 10)

9. Considere la función f(t) = 3t – 16t^2 **[12 puntos]**

a) Hallar f '(a) usando la definición de derivada.

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{3(a+h) - 16(a+h)^2 - [3a - 16a^2]}{h}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{3a + 3h - 16a^2 - 32ah - 16h^2 - 3a + 16a^2}{h} =$$

$$\lim_{x\to a}\frac{h(3 - 32a - 16h)}{h} = 3 - 32a$$

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la función f(t) en el punto (1 , -13)

m = f '(1)= 3 – 32 = -29 (x_1, y_1) = (1 , -13)
y +13 = -29 (x – 1)

y = -29x + 16

10. Dado que $f(x) = x|x|$. ¿Cuál es f '(0)? Justifique su respuesta. **[8 puntos]**

$$f(x) = \begin{cases} x(x) = x^2, x \geq 0 \\ \\ x(-x) = -x^2, x < 0 \end{cases}$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{(0+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} h = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} - \frac{(0+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} - \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} - h = 0$$

$$\therefore\ f'(0) = 0$$

Bono [5 puntos]

La tabla siguiente representa la población de una ciudad, cada 10 años, Utilice estos datos para aproximar **P (1970)**

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1950	31.1	1980	28.0
1960	35.7	1990	25.7
1970	34.0	2000	25.7

$$P'(1970)=\frac{P(1980)\text{-}P(1960)}{1980\text{-}1960}=\frac{28-35.7}{20}=\frac{-7.7}{20}=-.385\approx-.39$$