**SOLUCIONES**

Instrucciones: Resolver todos los problemas siguiendo las instrucciones específicas del problema y mostrando un procedimiento completo y detallado. Se permite el uso de calculadora científica solamente. Incluir las unidades en las respuestas donde aplique.

1. [10 puntos] Calcular la función derivada de la función $\boxed{f(x)=5x^2}$ usando la definición de derivada. (No habrá crédito alguno por calcular la derivada de otra manera.)

**SOLUCION**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)^2-5x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5\left(x^2+2xh+h^2\right)-5x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5x^2+10xh+5h^2-5x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{10xh+5h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(10x+5h)}{h}=\lim_{h\to 0}(10x+5h)=10x+5(0)=\boxed{10x}$$

2. [6 puntos] Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $\boxed{y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$ en el punto $(1,2)$.

**SOLUCION**

$f(1)=\frac{1}{1}+\frac{1}{1^2}=2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{f(1)=2}$

$f(x)=x^{-1}+x^{-2} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-1x^{-2}-2x^{-3} \quad\Rightarrow\quad f'(1)=-1(1)^{-2}-2(1)^{-3}=-1-2=-3 \quad\Rightarrow\quad \boxed{f'(1)=-3}$

$y=f(1)+f'(1)(x-1)$

$\boxed{y=2-3(x-1)}$

$\boxed{y=-3x+5}$

3. [9 puntos] En el planeta Upsilon (sin atmósfera), se deja caer una piedra desde una altura de 2000 pies. Después de $t$ segundos, la piedra ha caído una distancia de $\boxed{s(t)=20t^2}$ pies. Contestar las preguntas siguientes, incluyendo las unidades en tus respuestas.

a. Expresar la velocidad de la piedra como función de tiempo.

**SOLUCION**

$v(t)=s'(t)=40t \quad\Rightarrow\quad \boxed{v(t)=40t}\ (pies/seg)$

b. ¿Cuánto tiempo se tarda la piedra en caer a la superficie del planeta?

**SOLUCION**

Cae a la superficie cuando ha caído los 2000 pies:

distancia caída $=s(t)=2000 \quad\Rightarrow\quad 20t^2=2000 \quad\Rightarrow\quad t^2=100 \quad\Rightarrow\quad \boxed{t=10\ seg}$

c. ¿Con qué velocidad impacta la superficie de la tierra?

**SOLUCION**

$v(10)=40(10)=\boxed{400\ pies/seg}$

4. [8 puntos] Una barra de metal se calienta en un horno hasta llegar a una temperatura de 500 $^\circ F$, se saca del horno y se pone a enfriar en una temperatura ambiente constante de 90 $^\circ F$. Suponiendo que la temperatura $T$ (en $^\circ F$) de la barra después de $t$ minutos es dada por la función $\boxed{T(t) = 90 + 410e^{-0.01t}}$:

a. Calcular la temperatura de la barra después de 100 minutos.

**SOLUCION**

$$T(100) = 90 + 410e^{-0.01(100)} = \boxed{90 + 410e^{-1} \approx 240.831^\circ F}$$

b. Calcular la razón de cambio instantánea de la temperatura de la barra en el momento $t = 100$. (Incluir las unidades en tu respuestas.)

**SOLUCION**

$$RCI = T'(t) = 0 + 410(-0.01)e^{-0.01t} = -4.1e^{-0.01t}$$

$$T'(100) = -4.1e^{-0.01(100)} = \boxed{-4.1e^{-1} \approx -1.5^\circ F/\min}$$

5. [7 puntos] Hallar los valores de $x$ en donde la recta tangente a la gráfica de la función $\boxed{f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x}$ es horizontal.

**SOLUCION**

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$6\left(x^2 + x - 2\right) = 0$$

$$6(x+2)(x-1) = 0$$

$$x + 2 = 0 \qquad x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = -2} \qquad \boxed{x = 1}$$

6. [8 puntos] Suponer que el número $I$ (en millones) de computadoras infectadas por un nuevo virus $t$ días después de su aparición es dada por la función $\boxed{I(t) = \dfrac{e^t}{100 + e^t}}$.

a. ¿Cuántas computadoras están infectadas después de 5 días?

**SOLUCION**

$$I(5) = \frac{e^5}{100 + e^5} \approx 0.597445 \text{ millones} \approx \boxed{597{,}445 \text{ computadoras}}$$

b. ¿Cuán rápido está creciendo el número de computadoras infectadas después de 5 días?

**SOLUCION**

$$I'(t) = \frac{\left(e^t\right)\left(100 + e^t\right) - \left(e^t\right)\left(e^t\right)}{\left(100 + e^t\right)^2} = \frac{100e^t + e^{2t} - e^{2t}}{\left(100 + e^t\right)^2} = \frac{100e^t}{\left(100 + e^t\right)^2}$$

$$I'(5) = \frac{100e^5}{\left(100 + e^5\right)^2} \approx 0.240505 \text{ millones/dia} \approx \boxed{240{,}505 \text{ computadoras/dia}}$$

7. [40 puntos] Calcular y simplificar la derivada de cada función usando reglas y fórmulas de derivadas.

a. $f(x)=\dfrac{4x^3+1}{5x^3+2}$

**SOLUCION**

$$f'(x)=\frac{(12x^2)(5x^3+2)-(4x^3+1)(15x^2)}{(5x^3+2)^2}=\frac{60x^5+24x^2-60x^5-15x^2}{(5x^3+2)^2}=\boxed{\frac{9x^2}{(5x^3+2)^2}}$$

b. $f(x)=\sin(5x)-5x\cos(5x)$

**SOLUCION**

$$f'(x)=5\cos(5x)-\left[5\cos(5x)+5x(-5\sin(5x))\right]=5\cos(5x)-5\cos(5x)+25x\sin(5x)=\boxed{25x\sin(5x)}$$

c. $f(x)=(2x^2-2x+1)e^{2x}$

**SOLUCION**

$$f'(x)=(4x-2)(e^{2x})+(2x^2-2x+1)(2e^{2x})=(4x-2+4x^2-4x+2)e^{2x}=\boxed{4x^2e^{2x}}$$

d. $f(x)=(x-1)\sqrt{2x+1}$ (Expresar tu respuesta como **una** fracción.)

**SOLUCION**

$$f'(x)=(1)\sqrt{2x+1}+(x-1)\frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2}(2)=\sqrt{2x+1}+\frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}=\frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}}+\frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}=\frac{2x+1+x-1}{\sqrt{2x+1}}=\boxed{\frac{3x}{\sqrt{2x+1}}}$$

e. $f(x)=\dfrac{1}{(\tan x+\sec x)^2}$

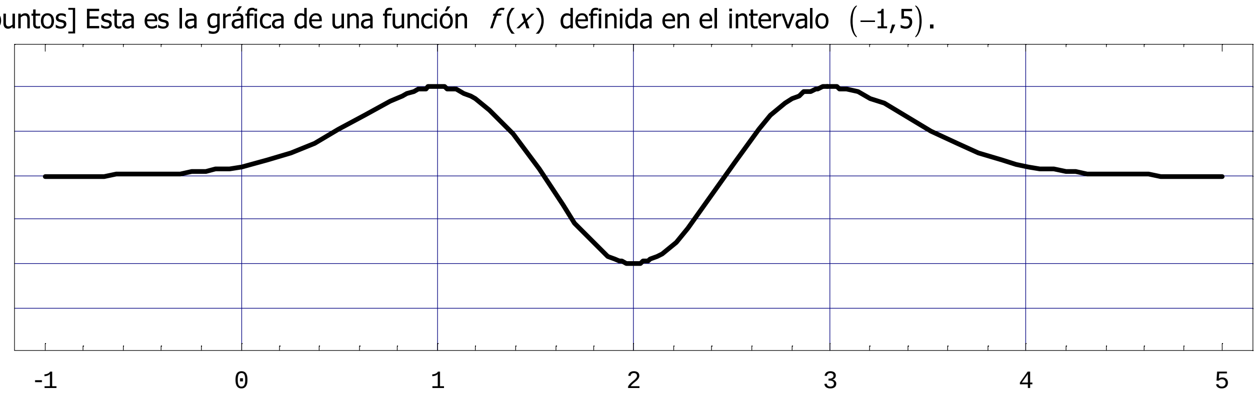
**SOLUCION**

$f(x)=(\tan x+\sec x)^{-2}$

$f'(x)=-2(\tan x+\sec x)^{-3}(\sec^2 x+\sec x\tan x)=-\dfrac{2(\sec^2 x+\sec x\tan x)}{(\tan x+\sec x)^3}=-\dfrac{2\sec x(\sec x+\tan x)}{(\tan x+\sec x)^3}$

$f'(x)=\boxed{-\dfrac{2\sec x}{(\tan x+\sec x)^2}}$

8. [12 puntos] Esta es la gráfica de una función $f(x)$ definida en el intervalo $(-1,5)$.




Llenar estos blancos sobre la función derivada $f'(x)$:

**SOLUCION**

a. $f'(x)>0$ en los intervalos $\boxed{(-1,1)}$ y $\boxed{(2,3)}$

b. $f'(x)<0$ en los intervalos $\boxed{(1,2)}$ y $\boxed{(3,5)}$

c. $f'(x)=0$ en los puntos $\boxed{x=1}$, $\boxed{x=2}$, $\boxed{x=3}$

d. Gráfica de $f'(x)$