U.P.R. Departamento de Ciencias Matemáticas RUM
MATE 3031 Primer Examen Parcial 27 de septiembre de 2007

Nombre: ____________________________ Sección:____
Profesor: __________________________

Instrucciones: Lea cada pregunta minuciosamente y muestre todo su trabajo. Está prohibido copiar, consultar con otro estudiante y/o preguntar al profesor durante el examen.

1. [25 puntos] Halle la derivada, $\frac{dy}{dy}$, de las siguientes funciones, simplificando la primera derivada

(a) $y = 4x^3 + 2x - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \pi^4 = 4x^3 + 2x - x^{-1/2} + \pi^4$

$y' = 12x^2 + 2 + \frac{1}{2}x^{-3/2}$

(b) $y = \dfrac{\left(2x^2+x\right)^4}{x-1}$

aplicando la regla del cociente y de la cadena

$$y' = \frac{4\left(2x^2+x\right)^3(4x+1)(x-1) - \left(2x^2+x\right)^4}{(x-1)^2} = \frac{\left(2x^2+x\right)^3\left(4(4x+1)(x-1) - \left(2x^2+x\right)\right)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{\left(2x^2+x\right)^3\left(14x^2-13x-4\right)}{(x-1)^2}$$

(c) $y = x\sin(2^x)$

aplicando la derivada del producto y la regla de la cadena

$y' = \sin(2^x) + x\cos(2^x)(2^x \ln 2)$

(d) $y = \sqrt{x^2-1}\sec^{-1} x$

aplicando la derivada del producto

$$y' = \sqrt{x^2-1}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\sec^{-1} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\sec^{-1} x$$

(e) $y = \tan\left(e^{\cos x}\right)$

aplicando la regla de la cadena

$y' = \sec^2\left(e^{\cos x}\right)e^{\cos x}(-\sin x) = -\sin x e^{\cos x}\sec^2\left(e^{\cos x}\right)$

2. Resuelva los siguientes ejercicios

(a) (6 puntos) halle y' de $y - \cos(xy) = 0$

aplicando diferenciación implícita

$y' + \sin(xy)\,(y + xy') = 0$ agrupando para y' obtenemos: $y'\,(1 + x\sin(xy)) = -y\sin(xy)$ y despejando y' se obtiene

$y' = -\dfrac{y\sin(xy)}{1 + x\sin(xy)}$

(b) (7 puntos) halle las coordenadas del punto en que la recta tangente a la curva $y = e^x$ es paralela a la recta $x - 4y = 1$

despejando y en la ecuación de la recta paralela se obtiene $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ y su pendiente es $m = \frac{1}{4}$ la que es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva $y = e^x$ en el punto (a, e^a), es decir, $y'(a) = \frac{1}{4}$.

Calculando la derivada de y obtenemos $y' = e^x$ y por lo tanto $y'(a) = e^a = \frac{1}{4}$ y se obtiene $a = \ln(\frac{1}{4}) = -\ln 4$ y $e^a = e^{-\ln 4} = e^{\ln 4^{-1}} = \frac{1}{4}$ y el punto sobre la curva es: $\left(-\ln 4, \frac{1}{4}\right)$

(c) (7 puntos) sea $h(x) = x^3 f(x)$, $f(4) = 2$ y $f'(4) = -2$, halle $h'(4)$

calculamos la derivada de h, aplicando la derivada del producto, es decir,

$h'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x)$

$h'(4) = 3\,(4)^2\, f(4) + 4^3 f'(4) = 3\,(4)^2\,(2) + 4^3\,(-2) = -32$

(d) (8 puntos) encuentre los valores de x en el intervalo abierto $(0, \pi)$ donde la tangente a la gráfica de la curva $y = \cot x - 2\csc x$ es horizontal

calculamos la derivada de y,

$y' = -\csc^2 x + 2\csc x\cot x = -\csc x\,(\csc x - 2\cot x)$

para determinar los valores de x en los cuales la tangente es horizontal, igualamos la derivada a cero, es decir

$y' = -\csc x\,(\csc x - 2\cot x) = 0 \Rightarrow \csc x - 2\cot x = 0$ o

$\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{2\cos x}{\sin x} = \dfrac{1 - 2\cos x}{\sin x} = 0 \Rightarrow 1 - 2\cos x = 0$, cuya solución is: $\left\{-\frac{1}{3}\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{1}{3}\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ y en el intervalo $(0, \pi)$ los valores de x es $\left\{\frac{1}{3}\pi\right\}$

(e) (8 puntos) considere la ecuación $x^2 + xy + y^2 = 1$, halle los valores de x en los cuales $y' = 0$

derivando en forma implícita se tiene,

$2x + y + xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{2x + y}{x + 2y}$ igualando la primera derivada a cero se obtiene

$y' = -\dfrac{2x + y}{x + 2y} = 0 \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$ sustituyendo en la ecuación original se obtiene

$x^2 + x\,(-2x) + (-2x)^2 = 1$, cuya solución is: $\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ -hasta aquí la solución- y por lo tanto los puntos son:

$\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

(f) (8 puntos) sea $g(x) = f(3x - 1)$, halle $g'(\frac{1}{3})$ si $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

calculamos la derivada de g, aplicando la regla de la cadena, es decir,

$g'(x) = f'(3x - 1)\,(3)$, como $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ entonces $f'(3x - 1) = \dfrac{1}{(3x - 1)^2 + 1}$ y

$g'(x) = 3\dfrac{1}{(3x - 1)^2 + 1}$

$g'(\frac{1}{3}) = 3\dfrac{1}{\left(3\frac{1}{3} - 1\right)^2 + 1} = 3$

3. Un objeto se mueve a lo largo del eje X. Su posición en el tiempo t, $0 \leq t \leq 6$ está dada por la ecuación $x(t) = t^2 - 4t + 6$, se pide:

   (a) (4 puntos) determine cuando el objeto se mueve a la izquierda

   derivando x se tiene,

   $x' = 2t - 4$ hallamos los valores de t para el cual x' es igual a cero

   $2t - 4 = 0$, cuya solución es: $t = 2$ en el intervalo $(0, 6)$

   el objeto se mueve a la izquierda si $x' < 0$ es decir, $2t - 4 < 0 \Rightarrow 0 < t < 2$

   (b) (2 puntos) determine cuando el objeto se mueve a la derecha

   el objeto se mueve a la derecha si $x' > 0$, es decir, $2t - 4 > 0 \Rightarrow t > 2$

   (c) (3 puntos) grafique el movimiento del objeto durante los primeros 6 segundos

4. Desde la azotea de un edificio de gran altura se lanza un objeto hacia arriba (alcanza su máxima altura con respecto al suelo) y cae al suelo. Al cabo de t segundos el desplazamiento está dado por $s(t) = -16t^2 + 96t + 176$, la distancia es dada en pies,

   (a) (5 puntos) halle la altura máxima alcanzada por el objeto

   la altura máxima se obtiene si $v = 0$ donde $v = s' = -32t + 96 = 0 \Rightarrow t = 3$ seg. y la altura máxima es dada por

   $s(3) = -16\,(3)^2 + 96\,(3) + 176 = 320$ pies

   (b) (4 puntos) la distancia total recorrida por el objeto

   la distancia total recorrida es igual a a dos veces la altura máxima menos la altura del edificio. La altura del edificio se obtiene al sustituir $t = 0$ en $s(t)$, es decir, $s(0) = 176$ y la distancia recorrida es:

   $d = 2(320) - 176 = 464$

5. Halle la derivada de las siguientes funciones, usando diferenciación implícita

(a) (6 puntos) $y = (3x-5)^{1/3}\left(x^2-8x+16\right)(x-1)^4$

aplicando ln a ambos lados se obtiene

$\ln y = \ln (3x-5)^{1/3}\left(x^2-8x+16\right)(x-1)^4 = \frac{1}{3}\ln(3x-5) + \ln\left(x^2-8x+16\right) + 4\ln(x-1)$ y luego derivamos implícitamente

$\dfrac{y'}{y} = \frac{1}{3}\dfrac{3}{3x-5} + \dfrac{2x-8}{x^2-8x+16} + 4\dfrac{1}{x-1}$ y

$y' = y\left(\dfrac{1}{3x-5} + \dfrac{2x-8}{x^2-8x+16} + \dfrac{4}{x-1}\right)$

$= (3x-5)^{1/3}\left(x^2-8x+16\right)(x-1)^4\left(\dfrac{1}{3x-5} + \dfrac{2x-8}{x^2-8x+16} + \dfrac{4}{x-1}\right)$

(b) (8 puntos) $y = (\sin x)^{\cos x}$

aplicando ln a ambos lados se obtiene

$\ln y = \cos x \ln(\sin x)$ y luego derivamos implícitamente

$\dfrac{y'}{y} = -\sin x \ln(\sin x) + \cos x \dfrac{\cos x}{\sin x} = -\sin x \ln(\sin x) + \cos x \cot x$ y

$y' = y\left(-\sin x \ln(\sin x) + \cos x \cot x\right) = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x \ln(\sin x) + \cos x \cot x\right)$

6. Bono (5 puntos) : halle $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tan 3t}{2t}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tan 3t}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin 3t}{2t\cos 3t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2\cos 3t}\frac{3\sin 3t}{3t} \overset{\text{por que } \lim_{t\to 0}\frac{\sin(at)}{at}=1}{=} \frac{1}{2}(3) = \frac{3}{2}$$