U.P.R. Departamento de Ciencias Matemáticas RUM
MATE 3031 Primer Examen Parcial 28 de febrero de 2008

Nombre: ______________________________ Sección:____
Profesor: ___________________________

Instrucciones: Lea cada pregunta minuciosamente y muestre todo su trabajo. Está prohibido copiar, consultar con otro estudiante y/o preguntar al profesor durante el examen.

1. [35 puntos] Halle la derivada, $\frac{dy}{dx}$, de las siguientes funciones y simplifique

(a) $y = 5x^4 - 3x - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + e^{-4} = 5x^4 - 3x - x^{-1/3} + e^{-4}$

$y' = 20x^3 - 3 + \frac{1}{3}x^{-4/3}$

(b) $y = \dfrac{\left(x^2-2x\right)^3}{x+3}$

aplicando la regla de la derivada del cociente

$$y' = \frac{3\left(x^2-2x\right)^2(2x-2)(x+3) - \left(x^2-2x\right)^3}{(x+3)^2} = \frac{\left(x^2-2x\right)^2\left(3\left(2x^2+4x-6\right) - \left(x^2-2x\right)\right)}{(x+3)^2}$$

$$= x^2\frac{(x-2)^2}{(x+3)^2}\left(5x^2+14x-18\right)$$

(c) $y = 3^x \sin\left(e^{\tan x}\right)$

aplicando la regla de la derivada del producto y la regla de la cadena

$$y' = 3^x \ln 3 \sin\left(e^{\tan x}\right) + 3^x \cos\left(e^{\tan x}\right) e^{\tan x}\sec^2 x = 3^x\left(\ln 3 \sin\left(e^{\tan x}\right) + \cos\left(e^{\tan x}\right)e^{\tan x}\sec^2 x\right)$$

(d) $y = \sqrt{1-x^2}\cos^{-1} x$

aplicando la regla de la derivada del producto

$$y' = \sqrt{1-x^2}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cos^{-1} x = -\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(x\cos^{-1} x + 1\right)$$

(e) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x - \sin x}$

aplicando la regla de la derivada del cociente

$$y' = \frac{\cos x\left(\cos x - \sin x\right) - \sin x\left(-\sin x - \cos x\right)}{\left(\cos x - \sin x\right)^2} = \frac{\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x + \sin x \cos x}{\left(\cos x - \sin x\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\left(\cos x - \sin x\right)^2}$$

2. Resuelva los siguientes ejercicios

(a) (8 puntos) halle $y' = \dfrac{dy}{dx}$ de $x^2 \cos y + \sin(2y) = xy$

aplicando diferenciación implícita

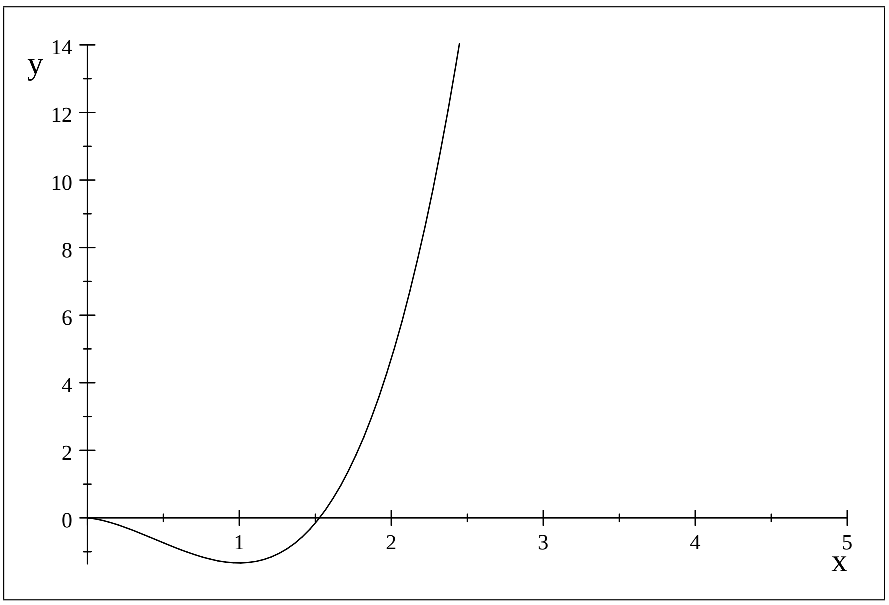
$2x \cos y - x^2 (\sin y)\, y' + \cos(2y)\, 2y' = y + xy'$

luego agrupamos y depejamos para y'

$y' \left(2\cos(2y) - x^2 \sin y - x\right) = y - 2x \cos y$

$y' = \dfrac{y - 2x\cos y}{2\cos(2y) - x^2 \sin y - x}$

(b) (9 puntos) halle las coordenadas de los puntos en que las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{x^4 - \frac{7}{3}x^2}{\sqrt{x}}$ son horizontales y verticales



$D(f) = (0, \infty)$, y podemos reescribir la función como: $y = x^{7/2} - \frac{7}{3}x^{3/2}$ y derivando obtenemos:

$y' = \frac{7}{2}x^{5/2} - \frac{7}{3}\frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{7}{2}x^{1/2}\left(x^2 - 1\right)$

para determinar la asíntota vertical se analiza para que valores de x, y' crece infinitamente, en nuestro caso no existe.

la asíntota horizontal se obtiene igualando la primera derivada a cero, es decir,

$\frac{7}{2}x^{1/2}\left(x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = \pm 1$ pero el único valor que satisface es $x = 1$.

(c) (7 puntos) halle $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^3}{\tan^3 t}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3}{\tan^3 t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{\tan^3 t}{t^3}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\tan t}{t}\right)^3} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\tan t}{t}\right)^3} = \frac{1}{\left(\lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}\right)^3} = \frac{1}{1} = 1$$

(d) (8 puntos) halle $y\prime$ si $y = \cos^2(\tan(1 - x^3))$

aplicando la regla de la cadena

$y' = 2\cos\left(\tan\left(1 - x^3\right)\right)\left(-\sin\left(\tan\left(1 - x^3\right)\right)\right)\sec^2\left(1 - x^3\right)3x^2$

(e) (8 puntos) si $f(x) = \ln(\sec x + \tan x)$, halle f'''

derivando dos veces se obtiene

$f'(x) = \frac{1}{\sec x + \tan x}\left(\sec x \tan x + \sec^2 x\right) = \sec x\left(\tan x + \sec x\right)\frac{1}{\sec x + \tan x} = \sec x$

$f''(x) = \sec x \tan x$

3. Halle la derivada de las siguientes funciones

(a) (8 puntos) $y = \dfrac{(6 - 9x)^{1/9}(6x + 16)^{1/3}}{\sec^{100}(x)}$

aplicando ln se obtiene

$\ln y = \ln(6 - 9x)^{1/9}(6x + 16)^{1/3} - \ln \sec^{100}(x) = \ln(6 - 9x)^{1/9} + \ln(6x + 16)^{1/3} - 100 \ln \sec x$

$= \frac{1}{9}\ln(6 - 9x) + \frac{1}{3}\ln(6x + 16) - 100 \ln \sec(x)$

derivando implícitamente

$\dfrac{1}{y}y' = \frac{1}{9}\dfrac{1}{6 - 9x}(-9) + \frac{1}{3}\dfrac{1}{6x + 16}(6) - 100\dfrac{1}{\sec x}\sec x \tan x = \dfrac{-1}{6 - 9x} + \dfrac{1}{3x + 8} - 100 \tan x$ y

se obtiene:

$$y' = \frac{(6 - 9x)^{1/9}(6x + 16)^{1/3}}{\sec^{100}(x)}\left(\frac{-1}{6 - 9x} + \frac{1}{3x + 8} - 100 \tan x\right)$$

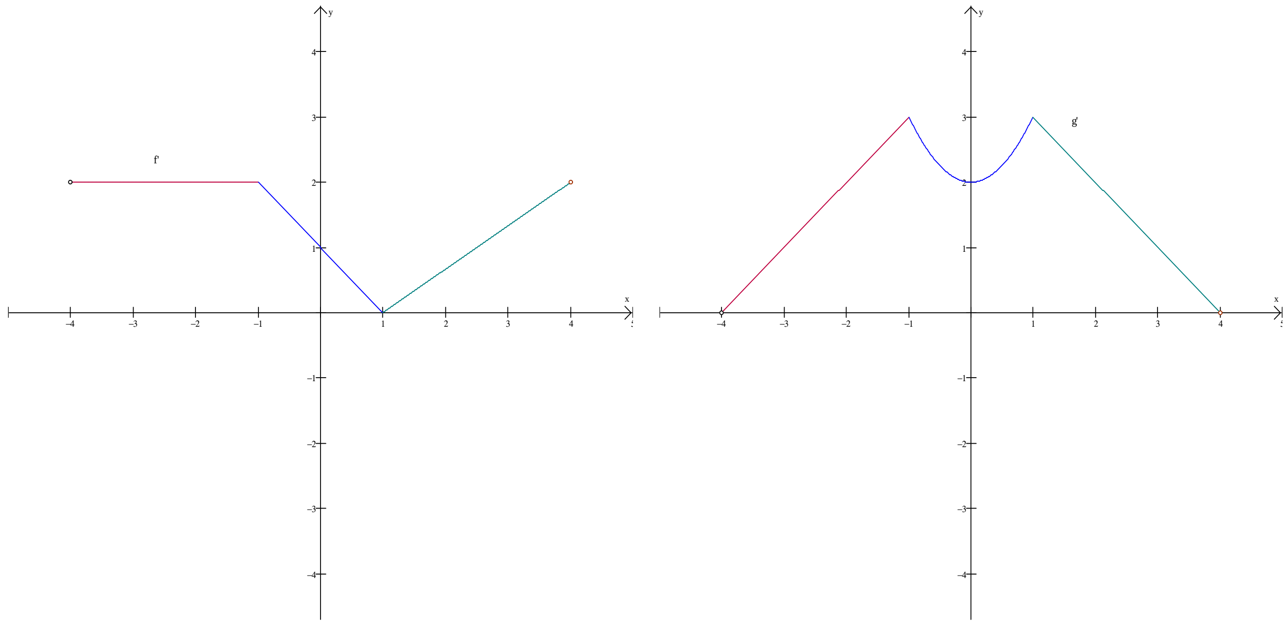
(b) (9 puntos) $y = \left(2^{x^2}\right)^{\tan x}$

aplicando ln se obtiene

$\ln y = \ln\left(2^{x^2}\right)^{\tan x} = \tan x \ln\left(2^{x^2}\right) = \tan x\left(x^2\right)\ln 2$ y luego derivando implícitamente

$\dfrac{1}{y}y' = \ln 2\left(2x \tan x + x^2 \sec^2 x\right) \Rightarrow y' = \left(2^{x^2}\right)^{\tan x}\left(x \ln 2\left(2 \tan x + x \sec^2 x\right)\right)$

4. A continuación se presenta la gráfica de las funciones f y g, utilice estas gráficas para responder partes a, b y c.



(a) (2 puntos) halle $(f+g)'(0)$

$f'(0) =$ pendiente del segmento de recta en el intervalo $(-1,1)$ y es igual a -1
$g'(0) =$ pendiente de la recta tangente a la gráfica de g en $x=0$ y es 0
$(f+g)'(0) = f'(0) + g'(0) = -1 + 0 = -1$

(b) (2 puntos) halle $(f/g)'(0)$

usando la parte a y de las gráficas obtenemos $f(0)=1, g(0)=2$, se tiene

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)} = \frac{(-1)(2) - 1(0)}{2^2} = \frac{-1}{2}$$

(c) (4 puntos) halle $(f \circ g)'(-2)$

$f'(2) =$ pendiente del segmento de recta en el intervalo $(1,4)$ y es igual a $2/3$
$g'(-2) =$ pendiente del segmento de recta en el intervalo $(-4,-1)$ y es igual a 1

$$(f \circ g)'(-2) = f'(g(-2))g'(-2) = f'(2)g'(-2) = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$$