Universidad de Puerto Rico | Recinto Universitario de Mayagüez | Departamento de Matemáticas
MATE3031.0506.1 | SOLUCIONES EXAMEN IV (90 minutos) | 17 de noviembre de 2005

Nombre____ Número de Estudiante________________________

Profesor____ Sección____________________________________

Instrucciones: Evalúe las integrales, simplificando las respuestas, y resuelva los problemas mostrando un procedimiento completo. Se permite el uso de calculadora científica solamente. Incluya las unidades en las respuestas donde aplique.

1. $\displaystyle\int \frac{1-\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta = \int \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int \tan^2\theta\,d\theta = \int \left(\sec^2\theta - 1\right)d\theta = \boxed{\tan\theta - \theta + C}$

O

$$\int \frac{1-\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta = \int \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)d\theta = \int \left(\sec^2\theta - 1\right)d\theta = \boxed{\tan\theta - \theta + C}$$

2. $\displaystyle\int_1^2 \left(3x^2 + \frac{1}{x^3}\right)\left(3x^6 - x\right)dx$

$$= \int_1^2 \left(9x^8 - 3x^3 + 3x^3 - \frac{1}{x^2}\right)dx = \int_1^2 \left(9x^8 - x^{-2}\right)dx = \left(x^9 + \frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} = \left(2^9 + \frac{1}{2}\right) - \left(1^9 + \frac{1}{1}\right) = \boxed{2^9 - \frac{3}{2}}$$

3. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{y}{\sqrt{1-y^4}}\,dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{y}{\sqrt{1-\left(y^2\right)^2}}\,dy$

Transformando la integral: $\left\{\begin{array}{lll} \boxed{u = y^2} & y = 0 & \Rightarrow\ u = 0 \\ du = 2y\,dy & y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \Rightarrow\ u = \dfrac{1}{2} \\ \boxed{dy = \dfrac{1}{2y}\,du} & & \end{array}\right\}$

$$= \int_0^{1/2} \frac{y}{\sqrt{1-u^2}}\frac{1}{2y}\,du = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \frac{1}{2}\sin^{-1}u\Bigg|_{u=0}^{u=1/2} = \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}(1/2) - \sin^{-1}(0)\right) = \boxed{\frac{\pi}{12}}$$

4. $\displaystyle\int \frac{e^t}{\cos\left(e^t\right)\cot\left(e^t\right)}\,dt = \int \sec\left(e^t\right)\tan\left(e^t\right)e^t\,dt$

Transformando la integral: $\left\{\begin{matrix} \boxed{u = e^t} \\ \boxed{du = e^t\,dt} \end{matrix}\right\}$

$$\int \sec\left(e^t\right)\tan\left(e^t\right)e^t\,dt = \int \sec u \tan u\,du = \sec u + C = \boxed{\sec\left(e^t\right) + C}$$

5. $\displaystyle\int \frac{3x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ (Factorizar la respuesta.)

Transformando la integral: $\left\{\begin{matrix} \boxed{u = x^2+1}, \quad \boxed{x^2 = u-1} \\ du = 2x\,dx \\ \boxed{dx = \frac{1}{2x}dx} \end{matrix}\right\}$

$$= \int \frac{3x^3}{\sqrt{u}}\left(\frac{1}{2x}du\right) = \int \frac{3x^2}{2\sqrt{u}}\,du = \int \frac{3(u-1)}{2\sqrt{u}}\,du$$

$$= \frac{3}{2}\int \left(u^{1/2} - u^{-1/2}\right)du = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\right) + C = u^{3/2} - 3u^{1/2} + C$$

$$= (u-3)u^{1/2} + C = \boxed{\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2+1} + C}$$

6. $\displaystyle\int \frac{18x-3}{9x^2+1}\,dx = \int \frac{18x}{9x^2+1}\,dx - \int \frac{3}{9x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{9x^2+1}18x\,dx - \int \frac{1}{1+(3x)^2}3dx$

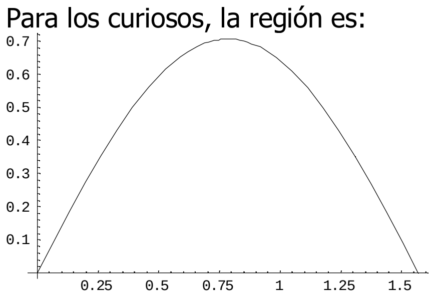
$$\left\{\begin{matrix} u = 9x^2+1 \\ du = 18x\,dx \end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix} v = 3x \\ dv = 3dx \end{matrix}\right\}$$

$$= \int \frac{1}{u}\,du - \int \frac{1}{1+v^2}\,dv$$

$$= \ln|u| - \tan^{-1}(v) + C = \boxed{\ln\left(9x^2+1\right) - \tan^{-1}(3x) + C}$$

7. Calcular el área de la región encerrada por el eje x y la curva $y = \cos x\sqrt{1-\cos(2x)}$ en el intervalo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Para los curiosos, la región es:



El área de la región está dada por la integral definida: Área $= \int_0^{\pi/2} \cos x\sqrt{1-\cos(2x)}\,dx$

Una de <u>varias posibles soluciones</u> es:

Usando una de las identidades de doble ángulo para coseno: $\boxed{\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x}$, y la identidad de doble ángulo para seno: $\boxed{\sin(2x) = 2\sin x\cos x}$ obtenemos:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\sqrt{1-\cos(2x)}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\sqrt{1-\left(1-2\sin^2 x\right)}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\sqrt{2\sin^2 x}\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(2x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{\sqrt{2}}{4}(-1-1) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Es importante notar que la simplificación $\sqrt{\sin^2 x} = \sin x$ es válida porque $\sin x \ge 0$ en el intervalo de integración $0 \le x \le \pi/2$.

8. [8 puntos] Hallar los puntos críticos y los puntos de inflexión de la función: $F(x) = \int_{-1}^{x} \left(t^2 - 2t\right)^{4/3} dt$

<u>Números Críticos</u>

Por el Teorema Fundamental de Cálculo: $F'(x) = \left(x^2 - 2x\right)^{4/3}$.

Como $F'(x)$ es real para todo valor real de x, los únicos números críticos son del tipo $F'(x) = 0$:

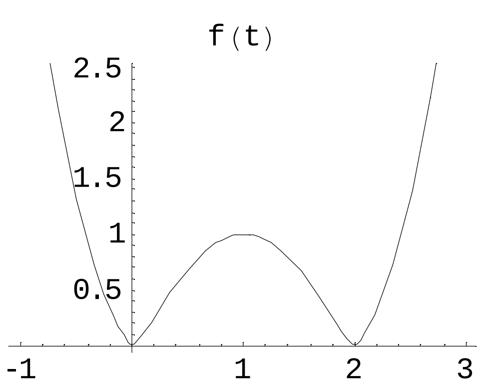
$$\Rightarrow \quad \left(x^2-2x\right)^{4/3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 0,\ \ x = 2}$$

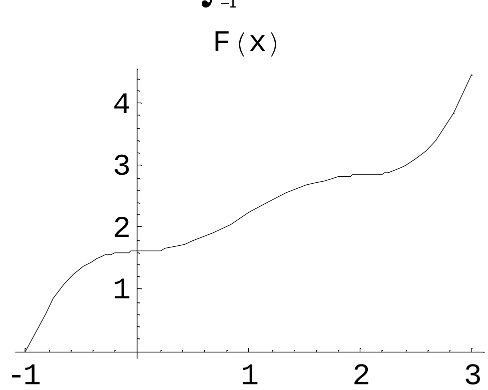
<u>Puntos de Inflexión</u>

$$F''(x) = \frac{4}{3}\left(x^2-2x\right)^{1/3}(2x-2) = \frac{8}{3}\left(x^2-2x\right)^{1/3}(x-1) = \frac{8}{3}x^{1/3}(x-2)^{1/3}(x-1) = 0$$

Los cambios de signo de F'' ocurren cuando: $F''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0,\ x = 1,\ x = 2}$

Para los curiosos, aquí estan las gráficas de $f(t) = \left(t^2-2t\right)^{4/3}$ y $F(x) = \int_{-1}^{x} \left(t^2-2t\right)^{4/3} dt$:





9. [10 puntos] Evaluar $\int_0^2 5x^2\,dx$ usando la definición de integral definida.

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = \frac{2}{n}}$$

$$f\left(x_i^*\right) = a + i\Delta x = 0 + \frac{2}{n}i \quad \Rightarrow \quad \boxed{f\left(x_i^*\right) = \frac{2}{n}i}$$

$$\int_0^2 5x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 5\left(\frac{2}{n}i\right)^2\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{40}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{40}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{20}{3}\frac{2n^3+\dots}{n^3}\right) = \left(\frac{20}{3}\right)(2) = \boxed{\frac{40}{3}}$$

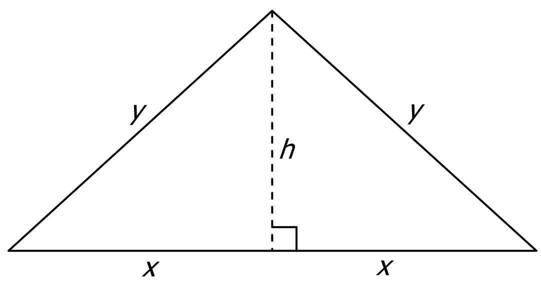
10. [10 puntos] Bajo ciertas hipótesis, podemos modelar la velocidad de caída de una gota de lluvia con la función: $v(t) = 7.6\left(1 - e^{-1.3t}\right)$ m/seg. Hallar $s(t)$: la distancia que cae la gota en t segundos.

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int 7.6\left(1 - e^{-1.3t}\right)dt = 7.6\left(t - \frac{e^{-1.3t}}{-1.3}\right) + C = 7.6t + \frac{7.6}{1.3}e^{-1.3t} + C$$

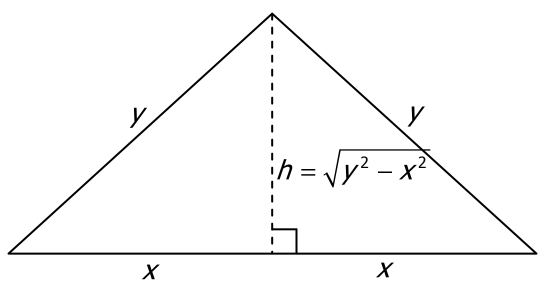
$$s(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 7.6(0) + \frac{7.6}{1.3}e^{-1.3(0)} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = -\frac{7.6}{1.3}}$$

$$\boxed{s(t) = 7.6t + \frac{7.6}{1.3}e^{-1.3t} - \frac{7.6}{1.3} \approx 7.6t + 5.846e^{-1.3t} - 5.846}$$

11. El perímetro de un triángulo isósceles es 6. Determine el valor máximo posible del área del triángulo. Recomendamos que use esta figura:



SOLUCION



Perímetro = distancia alrededor = $2x+2y=6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=3-x}$

Altura = $h=\sqrt{y^2-x^2}$, usando el Teorema de Pitágoras.

Area = $\frac{1}{2}(base)(altura)=\frac{1}{2}(2x)\left(\sqrt{y^2-x^2}\right)=x\sqrt{(3-x)^2-x^2}=x\sqrt{9-6x+x^2-x^2}=x\sqrt{9-6x}$

$$\boxed{Area=A(x)=x\sqrt{9-6x}}$$

Derivada:

$$A'(x)=(1)\sqrt{9-6x}+x\frac{1}{2}(9-6x)^{-1/2}(-6)=\sqrt{9-6x}-\frac{3x}{\sqrt{9-6x}}=\frac{9-6x-3x}{\sqrt{9-6x}}=\frac{9-9x}{\sqrt{9-6x}}=\boxed{\frac{9(1-x)}{\sqrt{9-6x}}}$$

Números críticos:

$$A'(x)=\frac{9(1-x)}{\sqrt{9-6x}}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=3-1=2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=1\sqrt{9-6(1)}=\sqrt{3}}$$

El triángulo de área máxima es un triángulo equilátero de lado 2 y área $\sqrt{3}$.

Nota: Vemos que es un máximo porque: $\left\{\begin{array}{lll} A'(x)>0 & si & x<1 \\ A'(x)<0 & si & x>1 \end{array}\right\}$