U.P.R. Departamento de Ciencias Matemáticas RUM
MATE 3031 Cuarto Examen Parcial 14 de noviembre de 2007

Nombre: ___________________________ Sección:____
Profesor: _________________________

Instrucciones: Lea cada pregunta minuciosamente y muestre todo su trabajo. Está prohibido copiar, consultar con otro estudiante y/o preguntar al profesor durante el examen.

1. Resuelva los siguientes ejercicios:

(a) (5 puntos) halle la antiderivada de la función $f(x) = \sqrt{x} + x^2 - k = x^{1/2} + x^2 - k$

$F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^3 - kx + c$

(b) (4 puntos) evalúe $\int_{-10}^{10} \sin x^3 dx$ justifique su respuesta

$\int_{-10}^{10} \sin x^3 dx = 0$, por que la función $\sin x^3$ es impar

(c) (4 puntos) exprese el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{n}i + 6\right)\frac{3}{n}$ como una integral definida en el intervalo $[0, 3]$

se tiene que $\Delta x = \frac{3}{n}, x_i^* = x_0 + \Delta x i = 0 + \frac{3}{n}i$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{n}i + 6\right)\frac{3}{n} = \int_0^3 (x + 6)\, dx$$

(d) (6 puntos) utilice la regla del extremo izquierdo para aproximar $\int_0^2 (x^3 + 2x)\, dx$ considerando 4 subintervalos

se tiene que $\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}, x_i^* = x_0 + \Delta x i = 0 + \frac{1}{2}i$, por lo tanto en nuestro caso se tiene $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, x_3 = \frac{3}{2}$

$$\int_0^2 (x^3 + 2x)\, dx \simeq \Delta x \left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(0^3 + 2(0)\right) + \left(\frac{1}{2}^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \left(1^3 + 2(1)\right) + \left(\frac{3}{2}^3 + 2\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right) = 5.25$$

(e) (9 puntos) evalúe $\int_0^2 (x^3 + 2x)\, dx$ utilizando la definición de integral

se tiene que $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}, x_i^* = x_0 + \Delta x i = 0 + \frac{2}{n}i = \frac{2}{n}i$, por lo tanto

$$f(x_i^*) = (x_i^*)^3 + 2x_i^* = \left(\frac{2}{n}i\right)^3 + 2\frac{2}{n}i = \frac{8}{n^3}i^3 + \frac{4}{n}i$$

$$\int_0^2 (x^3 + 2x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8}{n^3}i^3 + i\right)\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{8}{n^3}i^3 + \sum_{i=1}^{n}\frac{4}{n}i\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(\frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{4}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right) = 8$$

(f) (6 puntos) evalúe $\int \frac{t^{10}+5t^8+3t^2}{t^3}dt$

$\int \frac{t^{10}+5t^8+3t^2}{t^3}dt = \int \left(t^7+5t^5+3\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{8}t^8+\frac{5}{6}t^6+3\ln t+c$

(g) (4 puntos) si $g(x) = \int_{x^2}^{10} \sin t^3 dt$, halle $g'(x)$

$g(x) = -\int_{10}^{x^2} \sin t^3 dt,$

$g'(x) \overset{\text{aplicando el TF cálculo}}{=} -\sin\left(x^2\right)^3 2x = -2x\sin\left(x^6\right)$

(h) (7 puntos) evalúe $\int_1^5 \frac{\ln t}{2t}dt$

consideramos el cambio de variable $u = \ln t, du = \frac{1}{t}dt$ cambiando los límites de integración se tiene: $x = 1, u = 0; x = 5, u = \ln 5$

$\int_1^5 \frac{\ln t}{2t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\ln 5} udu = \frac{1}{2}\frac{u^2}{2}\Big]_0^{\ln 5} = \frac{1}{4}\left(\ln^2 5 - 0\right) = \frac{1}{4}\ln^2 5$

(i) (9 puntos) evalúe $\int \frac{3x-12}{\sqrt[5]{x^2-8x+1}}dx$

consideramos el cambio de variable $u = x^2-8x+1, du = (2x-8)\,dx = 2(x-4)\,dx$

$\int \frac{3x-12}{\sqrt[5]{x^2-8x+1}}dx = 3\int \frac{x-4}{\sqrt[5]{x^2-8x+1}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt[5]{u}}du = \frac{3}{2}\int u^{-1/5}du = \frac{3}{2}\frac{u^{4/5}}{4/5}+c$

$= \frac{15}{8}\left(x^2-8x+1\right)^{4/5}+c$

(j) (7 puntos) evalúe $\int \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}d\theta$

consideramos el cambio de variable $u = \sin\theta, du = \cos\theta d\theta$

$\int \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}d\theta = \int \frac{1}{u^3}du = \int u^{-3}du = -\frac{1}{2}u^{-2}+c = -\frac{1}{2}(\sin\theta)^{-2}+c = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\theta}+c$

2. Considere la función $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}dt$, halle

(a) (3 punto) halle $F'(x)$

$F'(x) \overset{\text{aplicando el TF cálculo}}{=} \sqrt{1+x^2}$

(b) (2 puntos) halle $F'(0)$

$F'(x) = \sqrt{1+0^2} = 1$

(c) (4 puntos) halle $F''(x)$

$F''(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3. La derivada de la función f es $3x^2+x-1$ y satisface $f(1)=1/2$,

(a) (7 puntos) halle $f(x)$

$f(x)=\int(3x^2+x-1)\,dx+c=x^3+\frac{1}{2}x^2-x+c$
para hallar el valor de c, sustituímos x por 1 y $f(1)$ por $1/2$
$f(1)=1^3+\frac{1}{2}1^2-1+c=1/2\Rightarrow c=0$
por lo tanto $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-x$

(b) (3 puntos) halle $f(3)$

$f(3)=3^3+\frac{1}{2}3^2-3=28.5$

4. (10 puntos) Calcule cuatro iteraciones del método de Newton para aproximar un cero de $f(x)=x^2-2$ si $x_1.=1$, es decir, halle x_4

sabemos que $x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, donde $f(x)=x^2-2$, $f'(x)=2x$, y se tiene que:

$x_n=x_{n-1}-\dfrac{x_{n-1}^2-2}{2x_{n-1}}$ para $n=2,3,4,\cdots$

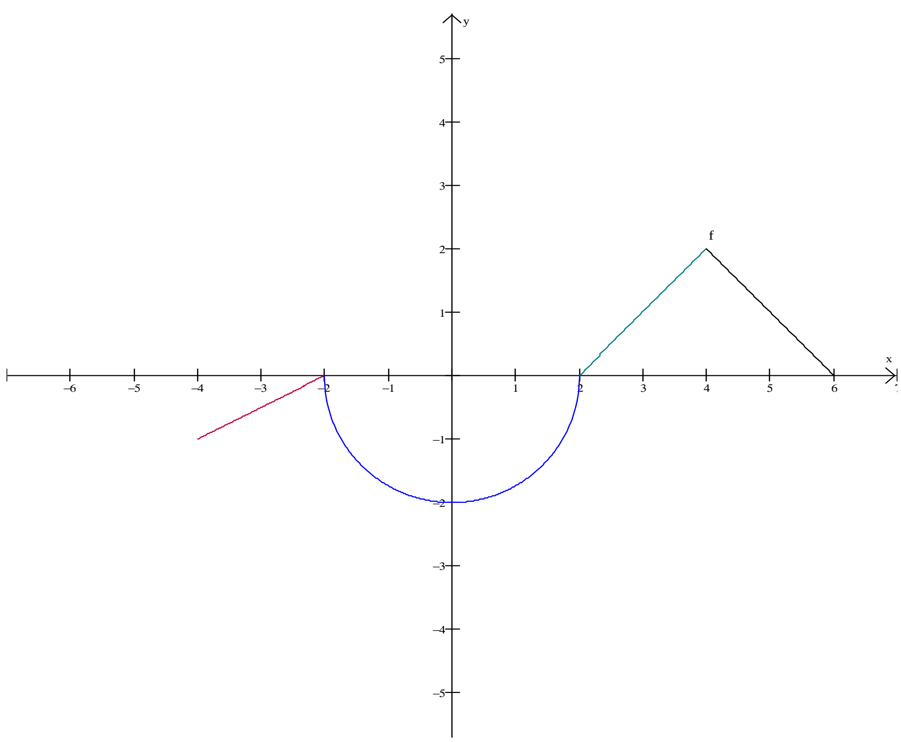
$x_2=x_1-\dfrac{x_1^2-2}{2x_1}=1-\dfrac{1-2}{2(1)}=1.5$

$x_3=x_2-\dfrac{x_2^2-2}{2x_2}=1.5-\dfrac{1.5^2-2}{2(1.5)}=1.4167$

$x_4=x_3-\dfrac{x_3^2-2}{2x_3}=1.4167-\dfrac{1.4167^2-2}{2(1.4167)}=1.4142$

el valor exacto se obtiene al resolver la ecuación $x^2-2=0$ cuya solución es $\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$

5. Sea $g(x)=\displaystyle\int_{-4}^{x}f(t)dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra a continuación



(a) (1 punto) halle $g(-4)$

$$g(-4) = \int_{-4}^{-4} f(t)dt = 0$$

(b) (2 puntos) halle $g(2)$

$$g(2) = \int_{-4}^{2} f(t)dt = \int_{-4}^{-2} f(t)dt + \int_{-2}^{2} f(t)dt$$

$= -$ (área de untriángulo)-(área de un semicírculo)$= -\left(\frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2}\pi \times 2^2\right) = -(1+2\pi)$

(c) (3 puntos) halle $g(6)$

$$g(6) = \int_{-4}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{4} f(t)dt + \int_{4}^{6} f(t)dt$$

=calculado en parte b+(área de untriángulo) + (área de untriángulo)

$= -(1+2\pi) + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 3 - 2\pi$

(d) (2 puntos) indique el valor de x para el cual la función g alcanza su mínimo valor

alcanza su mínimo valor en $x = 2$

(e) (2 puntos) indique el valor de x para el cual la función g alcanza su máximo valor

alcanza su máximo valor en $x = -4$

Sugerencia:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$