U.P.R. Departamento de Ciencias Matemáticas RUM
MATE 3031 Cuarto Examen Parcial 23 de abril de 2008

Nombre: ____________________________ Sección:____
Profesor: __________________________

Instrucciones: Lea cada pregunta minuciosamente y muestre todo su trabajo. Está prohibido copiar, consultar con otro estudiante y/o preguntar al profesor durante el examen.

1. Resuelva los siguientes ejercicios:

(a) (5 puntos) halle la antiderivada más general de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + x + a^2$

$F(x) = \frac{3}{5}x^{5/3} + \frac{1}{2}x^2 + a^2x + c$

(b) (4 puntos) si $f'(x) = \sec^2 x + 2x + 1$ y $f(0) = 1$, halle $f(x)$

$f(x) = \tan x + x^2 + x + c$, sustituyendo x por 0 se obtiene el valor de $c : f(0) = \tan 0 + 0 + 0 + c = 1$ y se obtiene $f(x) = \tan x + x^2 + x + 1$

(c) (4 puntos) evalúe $\int_{-3}^{3} (x^2 - 4)\, dx$

$$\int_{-3}^{3} (x^2 - 4)\, dx = \left(\tfrac{1}{3}x^3 - 4x\right)|_{-3}^{3} = \left(\tfrac{1}{3}3^3 - 4(3)\right) - \left(\tfrac{1}{3}(-3)^3 - 4(-3)\right) = -6$$

(d) (6 puntos) evalúe $\int_{1}^{5} |3 - x|\, dx$

$$|3 - x| = \begin{cases} 3 - x \text{ si } 3 - x \geq 0 \\ -(3 - x) \text{ si } 3 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3 - x \text{ si } x \leq 3 \\ -(3 - x) \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

$$\int_{1}^{5} |3 - x|\, dx = \int_{1}^{3} (3 - x)\, dx - \int_{3}^{5} (3 - x)\, dx = \left(3x - \tfrac{1}{2}x^2\right)|_{1}^{3} - \left(3x - \tfrac{1}{2}x^2\right)|_{3}^{5}$$
$$= \left[\left(3(3) - \tfrac{1}{2}3^2\right) - \left(3(1) - \tfrac{1}{2}1^2\right)\right] - \left[\left(3(5) - \tfrac{1}{2}5^2\right) - \left(3(3) - \tfrac{1}{2}3^2\right)\right] = 2 - (-2) = 4$$

(e) (4 puntos) exprese el límite $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{n}i \sin\left(\frac{3}{n}i\right)\right)\frac{3}{n}$ como una integral definida en el intervalo $[0, 3]$

se puede observar que $\Delta x = \dfrac{3}{n}, x_i = \dfrac{3}{n}i$ por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{n}i \sin\left(\frac{3}{n}i\right)\right)\frac{3}{n} = \int_0^3 x \sin x dx$

(f) (6 puntos) utilice la regla del extremo derecho para aproximar $\int_{1}^{3} (x^2 - x)\, dx$ considerando 4 subintervalos

$\Delta x = \dfrac{3 - 1}{4} = \dfrac{1}{2}, x_i = 1 + \dfrac{1}{2}i,\ i = 1, 2, 3, 4$

$$\int_{1}^{3} (x^2 - x)\, dx = \Delta x\, (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)) = \frac{1}{2}(f(1.5) + f(2) + f(2.5) + f(3))$$
$$= \frac{1}{2}\left(1.5^2 - 1.5 + 2^2 - 2 + 2.5^2 - 2.5 + 3^2 - 3\right) = 6.25$$

el valor exacto es: $\int_{1}^{3} (x^2 - x)\, dx = 4.6667$

(g) (9 puntos) evalúe $\int_0^1 (2-x^2)\,dx$ utilizando la definición de integral

$\Delta x = \frac{1}{n}, x_i = 0 + i\Delta x = \frac{1}{n}i, f(x_i) = 2 - \left(\frac{1}{n}i\right)^2 = 2 - \frac{1}{n^2}i^2$ por lo tanto

$$\int_0^1 (2-x^2)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\left(2 - \frac{1}{n^2}i^2\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3}i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}n - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 2 - \frac{1}{3} = 1.666\,7$$

(h) (6 puntos) evalúe $\int \frac{1+\sqrt{u}+3u^3}{u}du$

$$\int \frac{1+\sqrt{u}+3u^3}{u}du = \int \left(\frac{1}{u} + u^{-1/2} + 3u^2\right) du = \ln u + 2u^{1/2} + u^3 + c$$

(i) (5 puntos) evalúe $\int \left(\sec u \tan u - \frac{1}{1+u^2}\right) du$

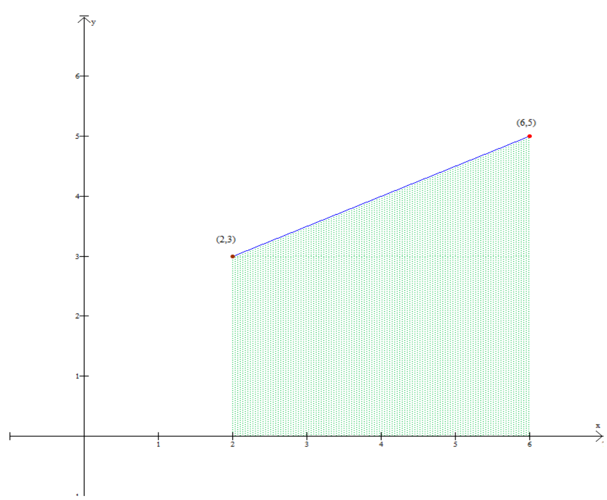
$$\int \left(\sec u \tan u - \frac{1}{1+u^2}\right) du = \sec u - \arctan u + c$$

(j) (4 puntos) si $g(x) = \int_{2x}^{10} \sqrt{1+t^3}dt$, halle $g'(x)$

$$g(x) = \int_{2x}^{10} \sqrt{1+t^3}dt = -\int_{10}^{2x} \sqrt{1+t^3}dt$$

$$g'(x) = -2\sqrt{1+8x^3}$$

(k) (7 puntos) Exprese el área de la región como una integral que se muestra en la figura y determine su valor



hallamos la ecuación de la recta: $y = \frac{1}{2}x + 2$, y el área es:

$$A = \int_2^6 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x\right)\Big|_2^6 = \left(\frac{1}{4}6^2 + 2(6)\right) - \left(\frac{1}{4}2^2 + 2(2)\right) = 16$$

(l) (4 puntos) si $\int_1^8 f(x)dx = 19$, $\int_1^3 f(x)dx = 6$, $\int_5^8 f(x)dx = 4$, halle $\int_3^5 f(x)dx =$

$\int_1^8 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx$ sustituyendo los valores dados se obtiene:

$19 = 6 + \int_3^5 f(x)dx + 4 \Rightarrow \int_3^5 f(x)dx = 9$

(m) (5 puntos) evalúe $\int (x^e - \sin x - \csc x \cot x)\, dx$

$\int (x^e - \sin x - \csc x \cot x)\, dx = \frac{1}{e+1}x^{e+1} + \cos x + \csc x + c$

2. Considere la función $F(x) = \int_1^x \left(4t^{3/4} - 2t^{1/2}\right) dt$, halle

(a) (3 punto) halle $F'(x)$

$F'(x) = 4x^{3/4} - 2x^{1/2}$

(b) (2 puntos) halle $F'(1)$

$F'(1) = 4\left(1^{3/4}\right) - 2\left(1^{1/2}\right) = 2$

(c) (4 puntos) halle $F''(x)$

$F''(x) = 3x^{-1/4} - x^{-1/2}$

3. (13 puntos) Se desea construir un almacén con un volumen de 100 m³ de forma rectangular con base cuadrada. El costo por metro cuadrado de los materiales es de \$36 para el piso, de \$54 para los lados y de \$27 para el techo. ¿Qué dimensiones debe tener el almacen para que el costo sea mínimo?

El volumen del almacén es $V = l^2 h = 100 \Rightarrow h = \frac{100}{l^2}$

El área de la superficie es: $A = 2l^2 + 4lh$ (área de la base+área del techo+área de las cuatro caras que son iguales)

sustituyendo h en A se tiene: $A = 2l^2 + 4l\frac{100}{l^2} = 2l^2 + \frac{400}{l}$ y la función de costo es:

$C(l) = 36l^2 + 27l^2 + 54 \times \frac{400}{l} = 63l^2 + \frac{21600}{l}$

$C'(l) = 126l - \frac{21600}{l^2} = \frac{1}{l^2}\left(126l^3 - 21\,600\right)$

$C''(l) = 126 + \frac{43200}{l^3} > 0$

igualando la primera derivada a cero se obtiene: $126l^3 - 21\,600 = 0$, cuya solución es: $l = \frac{1}{7}7^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1200} =$ 5.555 m, por lo tanto las dimensiones del almacén son: base cuadrada de 5.55 m y altura 3.2465 m.

4. (9 puntos) Calcule tres iteraciones del método de Newton para aproximar un cero (seis cifras decimales) de $f(x) = \cos x - x$ si $x_1 .= 0.5$, es decir, halle x_4

El proceso iterativo del método de Newton es: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, donde $f(x_k) = \cos x_k - x_k$ y $f'(x_k) = -\sin x_k - 1$

y generamos la siguiente tabla:

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
1	0.5	0.37758	-1.4794
2	0.75523	-2.7116×10^{-2}	-1.6855
3	0.73914	-9.1827×10^{-5}	-1.6737
4	0.73909	-8.1451×10^{-6}	

Sugerencia:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$