Universidad de Puerto Rico | Recinto Universitario de Mayagüez | Departamento de Matemáticas
MATE3031.0506.1 | EXAMEN FINAL (2 HORAS) | 6 de diciembre de 2005

Nombre______________________________ Número de Estudiante______________________

Profesor______________________________ Sección______________________________

Instrucciones: Resolver todos los problemas siguiendo las instrucciones específicas del problema y mostrando un procedimiento completo y detallado. Se permite el uso de calculadora científica solamente.

1. [8 puntos] Hallar la linealización de $f(x)=\sqrt[3]{5x^3+3x+8}$ en $x=0$.

$$f(0)=\sqrt[3]{8}=2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(0)=2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(5x^3+3x+8\right)^{-2/3}\left(15x^2+3\right)=\frac{5x^2+1}{\left(5x^3+3x+8\right)^{2/3}}$$

$$f'(0)=\frac{1}{8^{2/3}}=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(0)=\frac{1}{4}}$$

$$L(x)=f(0)+f'(0)x=2+\frac{1}{4}x$$

$$\boxed{\sqrt[3]{5x^3+3x+8}\approx 2+\frac{1}{4}x, \quad x \text{ cerca de } 0}$$

2. [8 puntos] Determinar el intervalo en el cual la función $f(x)=4xe^{-x^2/8}$ es creciente.

$$f'(x)=4e^{-x^2/8}+4xe^{-x^2/8}(-2x/8)=4e^{-x^2/8}-x^2e^{-x^2/8}$$

$$f'(x)=e^{-x^2/8}\left(4-x^2\right)$$

$$f(x) \text{ es creciente} \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad 4-x^2>0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{-2<x<2}$$

3. [10 puntos] Hallar el valor máximo absoluto y el valor mínimo absoluto de esta función en el intervalo $[0,2\pi]$:

$$f(\theta)=\sin(2\theta)+2\cos\theta$$

<u>Números Críticos</u>

$$f'(\theta)=2\cos(2\theta)-2\sin\theta=0$$
$$\cos(2\theta)-\sin\theta=0$$
$$\left(1-2\sin^2\theta\right)-\sin\theta=0$$
$$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$$
$$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0$$
$$2\sin\theta-1=0 \qquad \sin\theta+1=0$$
$$\sin\theta=\frac{1}{2} \qquad \sin\theta=-1$$
$$\boxed{\theta=\frac{\pi}{6},\ \theta=\frac{5\pi}{6}} \qquad \boxed{\theta=\frac{3\pi}{2}}$$

<u>Comparación de valores</u>

$$f(0)=2$$
$$\boxed{f(\pi/6)=\frac{3\sqrt{3}}{2}} \quad \text{(max abs)}$$
$$f(3\pi/2)=0$$
$$\boxed{f(5\pi/6)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}} \quad \text{(min abs)}$$
$$f(2\pi)=2$$

4. [16 puntos] Calcular y simplificar la derivada de estas funciones:

a. $f(x)=\tan^{-1}\left(\sqrt{e^{2x}-1}\right)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\sqrt{e^{2x}-1}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{e^{2x}-1}\right)'$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+e^{2x}-1}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{2x}-1\right)^{-1/2}\left(e^{2x}\right)(2)$$

$$f'(x)=\frac{1}{e^{2x}}\cdot\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}}$$

b. $g(s)=\ln\left[3s+\sqrt{9s^2-1}\right]$

$$g'(s)=\frac{3+\frac{1}{2}\left(9s^2-1\right)^{-1/2}(18s)}{3s+\sqrt{9s^2-1}}$$

$$g'(s)=\frac{3+9s\left(9s^2-1\right)^{-1/2}}{3s+\sqrt{9s^2-1}}\frac{\sqrt{9s^2-1}}{\sqrt{9s^2-1}}$$

$$g'(s)=\frac{3\sqrt{9s^2-1}+9s}{\left(3s+\sqrt{9s^2-1}\right)\sqrt{9s^2-1}}$$

$$g'(s)=\frac{3\left(\sqrt{9s^2-1}+3s\right)}{\left(3s+\sqrt{9s^2-1}\right)\sqrt{9s^2-1}}$$

$$\boxed{g'(s)=\frac{3}{\sqrt{9s^2-1}}}$$

5. [27 puntos] Evaluar estas integrales.

a. $$\int_1^{e^3}\frac{2x+\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}dx=\int_1^{e^3}\left(\frac{2x}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}\right)dx=\int_1^{e^3}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^{e^3}\left(2x^{-1/3}+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left(2\frac{3}{2}x^{2/3}+\ln x\right)\Bigg|_{x=1}^{x=e^3}=\left(3\left(e^3\right)^{2/3}+\ln e^3\right)-\left(3(1)^{2/3}+\ln 1\right)$$

$$=\left(3e^2+3\right)-(3+0)=\boxed{3e^2}$$

b. $$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(e^t\cos t\right)^2+\left(e^t\sin t\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{2t}\cos^2 t+e^{2t}\sin^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{2t}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}\,dt=$$

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{2t}(1)}\,dt=\int_0^{2\pi}e^t\,dt=e^t\Big|_{t=0}^{t=2\pi}=\boxed{e^{2\pi}-1}$$

c. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(3\theta)}{1+\sin^2(3\theta)}\,d\theta$

$$\boxed{u = \sin(3\theta)}$$

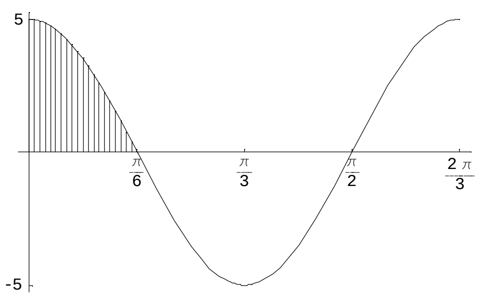
$$du = 3\cos(3\theta)\,d\theta \qquad \theta = 0 \;\Rightarrow\; u = \sin 0 = \boxed{0}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}du = \cos(3\theta)\,d\theta} \qquad \theta = \frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; u = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{1}$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(3\theta)}{1+\sin^2(3\theta)}\,d\theta = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{1+\sin^2(3\theta)}\cos(3\theta)\,d\theta = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\left(\frac{1}{3}du\right)$$

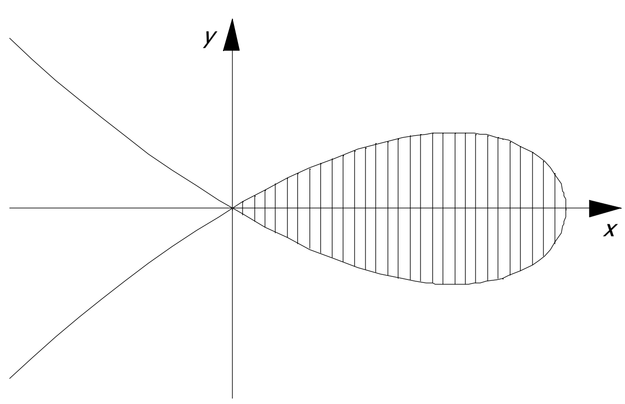
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{3}\tan^{-1}u\Big|_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{3}\left(\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \boxed{\frac{\pi}{12}}$$

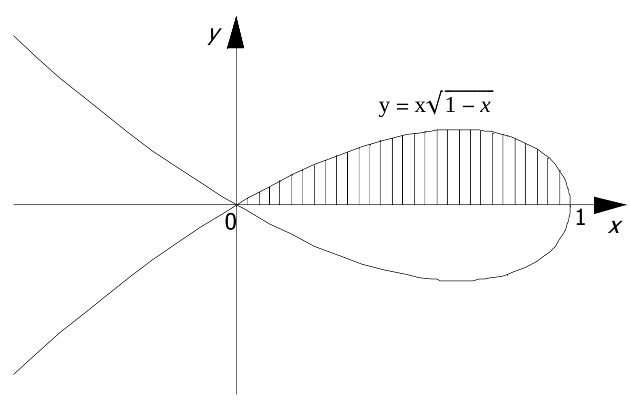
6. [8 puntos] Calcular el área de la región entre la curva $y = 5\cos(3x)$ y el eje x en el intervalo $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$. Dibujar la región.



$$Area = \int_0^{\pi/6} 5\cos(3x)\,dx = \frac{5}{3}\sin(3x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/6} = \frac{5}{3}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0\right) = \frac{5}{3}(1-0) = \boxed{\frac{5}{3}}$$

7. [10 puntos] La región sombreada en la gráfica está encerrada por la curva $y^2 = x^2(1-x)$. Calcular el área de la región.





El área es el doble del área de la región sombreada en la figura a la derecha, que es dada por la integral: $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

Esta integral se evalúa con la sustitución:

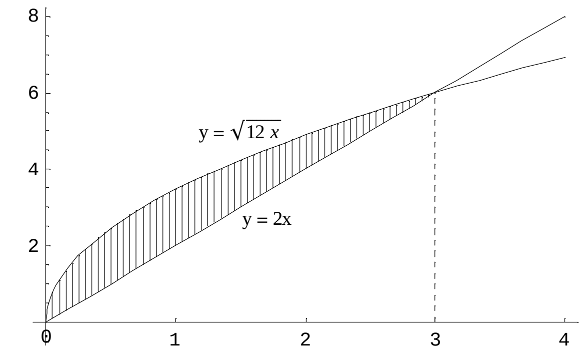
$$u = 1-x \qquad x = 0 \;\Rightarrow\; u = 1$$
$$x = 1-u \qquad x = 1 \;\Rightarrow\; u = 0$$
$$dx = -du$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx = \int_1^0 (1-u)\sqrt{u}\,(-du) = \int_0^1 (1-u)\sqrt{u}\,du$$

$$= \int_0^1 \left(u^{1/2} - u^{3/2}\right)du = \left(\frac{2}{3}u^{3/2} - \frac{2}{5}u^{5/2}\right)\Bigg|_{u=0}^{u=1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

Entonces el área de la región original es $2\left(\frac{4}{15}\right) = \boxed{\frac{8}{15}}$

8. [11 puntos] Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región encerrada por las curvas $\left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{12x} \\ y = 2x \end{array} \right\}$ alrededor del eje x. Dibujar la región.

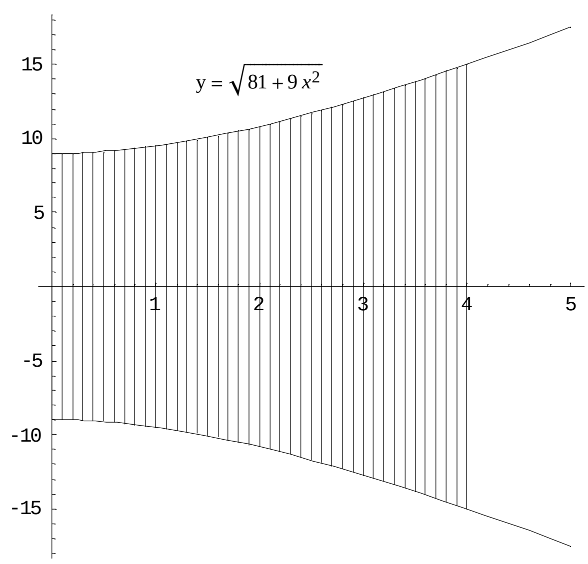


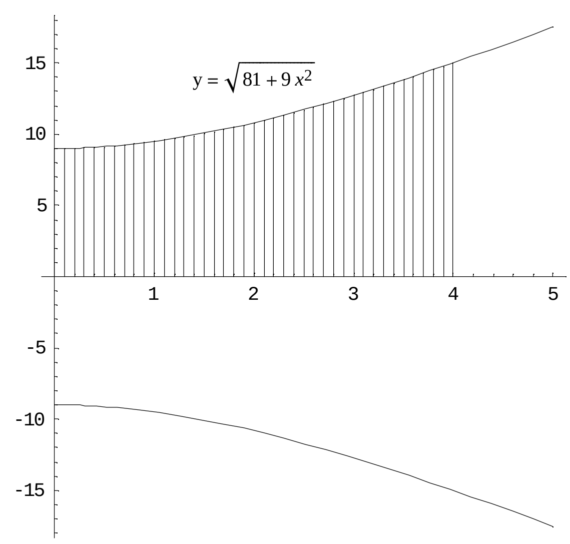
Al girar alrededor del eje x, se forman <u>arandelas</u>. El volumen es dado por la integral: $\int_0^3 \pi\left[\left(\sqrt{12x}\right)^2 - (2x)^2\right]dx$

$$\int_0^3 \pi\left[\left(\sqrt{12x}\right)^2 - (2x)^2\right]dx = \pi\int_0^3 \left(12x - 4x^2\right)dx = \pi\left(6x^2 - \frac{4}{3}x^3\right)\Big|_{x=0}^{x=3}$$

$$= \left(6(3)^2 - \frac{4}{3}3^3\right)\pi = \boxed{18\pi}$$

9. [12 puntos] Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región encerrada por la hipérbola $\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{9} = 1$ y las rectas $x = 0$, $x = 4$ alrededor del eje y. Dibujar la región.





La región completa está a la izquierda, el volumen es el doble del que se obtiene al girar la región a la derecha. Al girar, se forman casquillos cilíndricos.

El volumen total es dado por la integral: $V = 2\int_0^4 2\pi x\sqrt{81 + 9x^2}\,dx$

$$V = 2\int_0^4 2\pi x\sqrt{81 + 9x^2}\,dx = 4\pi\int_0^4 x\sqrt{9\left(9 + x^2\right)}\,dx = 12\pi\int_0^4 x\sqrt{9 + x^2}\,dx$$

Hacemos el cambio de variables: $\left\{ \begin{array}{l} u = 9 + x^2 \\ du = 2x\,dx \\ x = 0 \Rightarrow u = 9 \\ x = 4 \Rightarrow u = 25 \end{array} \right\}$

$$V = 12\pi\int_9^{25} \sqrt{u}\left(\frac{1}{2}du\right) = 6\pi\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_{u=9}^{u=25} = 4\pi\left(25^{3/2} - 9^{3/2}\right) = \boxed{392\pi}$$