U.P.R. Departamento de Ciencias Matemáticas RUM
MATE 3031 Examen Final 3 de diciembre de 2007

Nombre: ____________________________ Sección:____
Profesor: _________________________

Instrucciones: Lea cada pregunta minuciosamente y muestre todo su trabajo. Está prohibido copiar, consultar con otro estudiante y/o preguntar al profesor durante el examen.

1. Resuelva los siguientes ejercicios:

(a) (5 puntos) encuentre el límite $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ si existe

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\overset{\text{racionalizando}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

(b) (5 puntos) determine los intervalos en los cuales la función $f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x}}$ es continua

el dominio de la función es dado por:

$D(f)=\left\{x|\frac{x+2}{x}\geq 0\right\}=(-\infty,-2]\cup(0,\infty)$ y por lo tanto la función es continua en los intervalos $(-\infty,-2]$ y $(0,\infty)$

(c) (5 puntos) determine la asíntota vertical y horizontal de la función $f(x)=10e^{-2/x}$

hallamos el dominio de la función y es dado por:

$D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$, para determinar la asíntota vertical y horizontal de la función, hallamos:

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 10e^{-2/x}=10e^{-2/0^+}=10e^{-\infty}=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 10e^{-2/x}=10e^{-2/0^-}=10e^{\infty}=\infty$ y se tiene que $x=0$ es una asíntota vertical

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} 10e^{-2/x}=10e^{-2/\pm\infty^-}=10$ y se tiene que $y=10$ es una asíntota horizontal

(d) (4 puntos) determine si la función $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+2, & \text{si } x<-2\\ 1-5x-x^2, & \text{si } x\geq -2\end{cases}$ es diferenciable en $x=-2$

la función f no es continua en x=-2, ya que:

$$\begin{cases} f(-2)=1-5(-2)-(-2)^2=7\\ \lim_{x\to -2} f(x) \text{ no existe, ya que } \lim_{x\to -2^+} f(x)=7 \text{ y } \lim_{x\to -2^-} f(x)=-2 \end{cases},$$

por lo tanto no es diferenciable

(e) (5 puntos) si $f(x) = xe^x$, halle la derivada de orden 20 de la función f

hallamos las primeras derivadas de f, es decir,

$f'(x) = xe^x + e^x, \quad f''(x) = xe^x + 2e^x, \quad f'''(x) = xe^x + 3e^x, \cdots, f^{(n)}(x) = xe^x + ne^x$

por lo tanto, $f^{(20)}(x) = xe^x + 20e^x$

(f) (6 puntos) si $f(x) = \ln\left(\frac{x(x-1)}{x-2}\right)$,halle $f'(x)$

aplicando propiedades de logaritmo obtnemos:

$f(x) = \ln\left(\frac{x(x-1)}{x-2}\right) = \ln x + \ln(x-1) - \ln(x-2)$

derivando se obtiene:

$f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-2}$

(g) (5 puntos) use diferenciación implícita para hallar $\dfrac{dy}{dx}$ de $\cos(x+y) = x$

derivando implícitamente:

$-\sin(x+y)(1+y') = 1$ despejando para y' se obtiene:

$y' = -\dfrac{1}{\sin(x+y)} - 1$

(h) (4 puntos) un punto se mueve sobre la curva $y = \sqrt{x}$ tal que el valor de y aumenta a una razón de dos pies por segundo. Con qué rápidez cambia el valor de x cuando $x = 4$ pies?

debemos calcular $\dfrac{dx}{dt}$, para ello derivamos a y y x con respecto a t y se obtiene:

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\dfrac{dx}{dt}$ luego sustituyendo los valores dados se obtiene:

$2 = \dfrac{1}{2\sqrt{4}}\dfrac{dx}{dt}$ despejando para $\dfrac{dx}{dt}$ obtenemos:

$\dfrac{dx}{dt} = 8$ pies/seg.

(i) (4 puntos) determine los puntos de inflexión de la función $f(x) = x + \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

derivando dos veces a la función f, se obtiene:

$f'(x) = 1 - \sin x, \quad f''(x) = -\cos x$ igualando a cero la segunda derivada se resuelve la ecuación:

$-\cos x = 0 \Rightarrow x = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

f''		-		+		-	
	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π

por lo tanto la función f tiene sus puntos de inflexión en $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

(j) (6 puntos) determine los valores máximos y mínimos locales de la función $f(x) = 3x - 6\arctan x$

derivando la función f se tiene:

$f'(x) = 3 - 6\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{3+3x^2-6}{1+x^2} = \dfrac{3(x^2-1)}{1+x^2} = 0$ los números críticos son: $x = \pm 1$

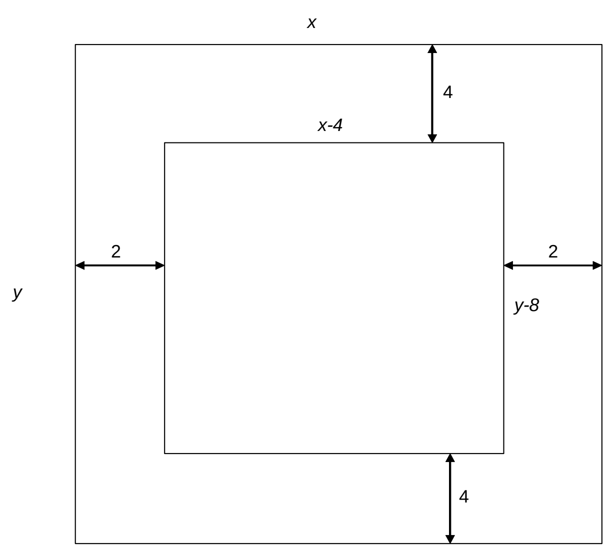
para verificar si alguno es un máximo o mínimo local de la función, calculamos la segunda derivada:

$f''(x) = 12\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$

$f''(-1) = 12\dfrac{(-1)}{(-1^2+1)^2} = -6 < 0$ lo que implica que en $x = -1$ la función f obtiene un máximo local y su valor máximo es $f(-1) = 3(-1) - 6\arctan(-1) = 1.7124$

$f''(1) = 12\dfrac{1}{(1^2+1)^2} = 6 > 0$ lo que implica que en $x = 1$ la función f obtiene un mínimo local y su valor mínimo es $f(1) = 3(1) - 6\arctan(1) = -1.7124$

(k) (7 puntos) Usted desea diseñar un poster rectangular de área igual a 50 pulgadas² de impresión en un papel que tiene un margen en la parte superior e inferior de 4 pulgadas y en cada lado 2 pulgadas de margen. Determine las dimensiones del papel a usarse que minimicen su área total.



El área del papel es dado por $A = xy$ y el área de la impresión es dada por $A_I = (x-4)(y-8) = 50$, despejamos de ésta última y y luego se reemplaza en A, es decir:

$y - 8 = \frac{50}{x-4}$ o $y = \frac{50}{x-4} + 8$, entonces $A = x\left(\frac{50}{x-4} + 8\right) = \frac{50x}{x-4} + 8x$ luego derivamos A y obtenemos:

$$A' = 8 - \frac{200}{(x-4)^2} = \frac{8(x-4)^2 - 200}{(x-4)^2} = 8\frac{x^2 - 8x + 16 - 25}{(x-4)^2} = 8\frac{x^2 - 8x - 9}{(x-4)^2}$$

$= 8\dfrac{(x-9)(x+1)}{(x-4)^2} = 0 \Rightarrow x = 9$ ó $x = -1$ que no puede ser, ya que las dimensiones deben ser positivas. por lo tanto $x = 9$ pulgadas y .$y = 18$ pulgadas

Verificación: $A'' = \dfrac{400}{(x-4)^3} \Rightarrow A''(9) = \dfrac{400}{(9-4)^3} > 0$

(l) (4 puntos) si $\int_{-2}^{6} f(x)\,dx = 10$, $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = -2$ y $3\int_{2}^{4} f(x)\,dx = 12$, halle $\int_{4}^{6} f(x)\,dx$

$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{6} f(x)\,dx$ para hallar $\int_{4}^{6} f(x)\,dx$ sustituimos los valores asignados a cada una de las otras tres integrales, es decir:

$10 = -2 + 4 + \int_{4}^{6} f(x)\,dx \Rightarrow \int_{4}^{6} f(x)\,dx = 8$

(m) (6 puntos) un objeto se está moviendo de tal forma que la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo t está dado por $2e^{t/2}+3t+1$ pies/seg. Si en $t=0$ el desplazamiento es 20 pies, determine el desplazamiento del objeto después de 4 segundos.

Sea $s(t)$ el desplazamiento de la partícula en el tiempo t, se tiene que $\frac{ds}{dt} = 2e^{t/2}+3t+1$ para hallar s, determinamos la antiderivada de $\frac{ds}{dt}$, es decir,

$s(t) = \int (2e^{t/2}+3t+1)dt = 4e^{t/2}+\frac{3}{2}t^2+t+c$ para hallar el valor de c, reemplazamos t por 0 y s por 20, y obtnemos:

$s(0) = 4e^{0/2}+\frac{3}{2}0^2+0+c = 20 \Rightarrow c = 16$ y $s(t) = 4e^{t/2}+\frac{3}{2}t^2+t+16$

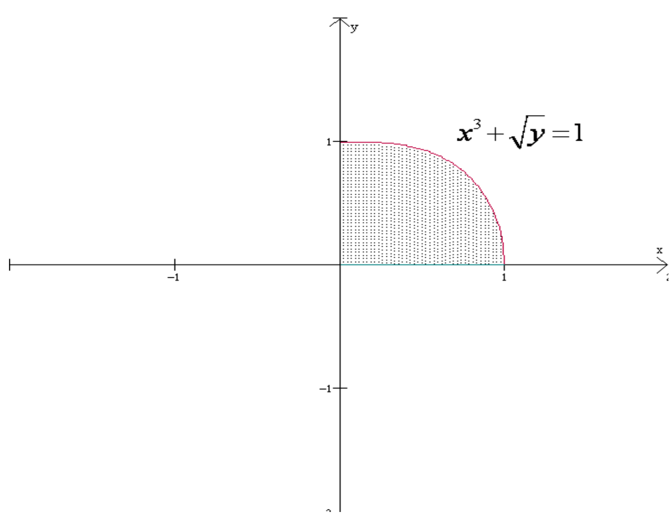
luego $s(4) = 4e^2+\frac{3}{2}4^2+4+16 = 73.556$

(n) (5 puntos) evalúe $\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}\sqrt{\sin\sqrt{t}}}dt$

consideramos la sustitución $u = \sin\sqrt{t}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\sqrt{t}dt$

$\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}\sqrt{\sin\sqrt{t}}}dt = 2\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = 4\sqrt{u}+c = 4\sqrt{\sin\sqrt{t}}+c$

2. (9 puntos) Halle el área de la región acotada por $x^3+\sqrt{y}=1, x=0, y=0$, ver figura

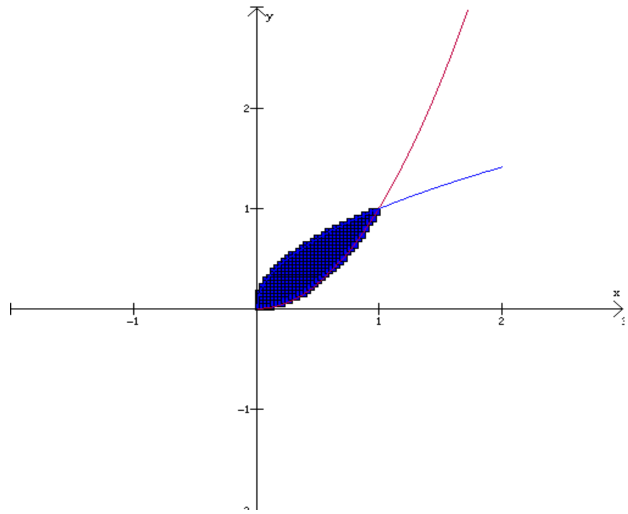


despejando para y se obtiene $y = (1-x^3)^2 = 1-2x^3+x^6$ y el área de la región se obtiene:

$A = \int_{0}^{1}(1-2x^3+x^6)dx = [x-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{7}x^7]_0^1 = \frac{9}{14}$

3. Considere las funciones $f\,(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$,

(a) (3 puntos) grafique la región acotada por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$

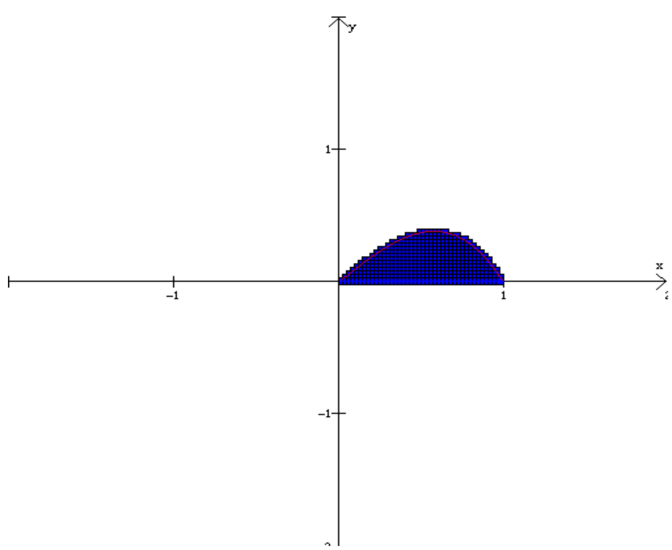


(b) (7 puntos) halle el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la región de la parte a) alrededor del eje X.

$V = \int_a^b A(x)dx$, donde el área de la sección transversal es $A(x) = \pi(\,(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\,)$

$$V = \int_0^1 \pi(\,(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\,)dx = \pi\int_0^1 (x - x^4)dx = \pi(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{5}x^5)|_0^1 = \frac{3}{10}\pi$$

4. (10 puntos) Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la región acotada por $y = x\,(1-x)\,(1+x) = x - x^3$, $x = 0$, $x = 1$ y el eje X, alrededor del eje Y, usando el método de arandelas (Cylindrical shells.)



$V = 2\pi\int_a^b rhdx$, donde $r = x, h = x - x^3$, es decir,

$$V = 2\pi\int_0^1 x(x - x^3)dx = 2\pi\int_0^1 (x^2 - x^4)dx = 2\pi(\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5)|_0^1 = \tfrac{4}{15}\pi$$