Universidad de Puerto Rico | Recinto Universitario de Mayagüez | Departamento de Matemáticas
MATE 3031 | EXAMEN FINAL (2 HORAS) | 23 de mayo de 2005

Nombre________________________________ Número de Estudiante_________________________

Profesor_______________________________ Sección_________________

Instrucciones: Hacer todos los problemas. Se permite el uso de calculadora científica.

Parte I: [52 puntos] Seleccione la mejor respuesta. (Circule su respuesta.)

1. La función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ es creciente en el intervalo:

   a. $(1,\infty)$
   b. $(0,1)$
   c. $(0,\infty)$
   d. $(1,e)$
   e. (e,∞)
   f. $(0,e)$
   g. $(0,e^{3/2})$
   h. $(1,e^{3/2})$
   i. $(e,e^{3/2})$
   j. $(e^{3/2},\infty)$

2. La función $f(x)=xe^{x}$ es cóncava hacia arriba en el intervalo:

   a. $(-2,\infty)$
   b. $(2,\infty)$
   c. $(-\infty,2)$
   d. $(-\infty,-2)$
   e. $(-1,\infty)$
   f. $(1,\infty)$
   g. $(-\infty,-1)$
   h. $(-\infty,1)$
   i. $\left(-\dfrac{1}{2},\infty\right)$
   j. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$

3. La función $f(x)=\sin^2 x$ tiene números críticos en los puntos:

   a. $x=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ldots$
   b. $x=0,\ \pm\pi,\ \pm2\pi,\ \pm3\pi,\ldots$
   c. $x=\dfrac{1}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ldots$
   d. $x=\pm\dfrac{1}{2}\pi,\ \pm\dfrac{3}{2}\pi,\ \pm\dfrac{5}{2}\pi,\ldots$
   e. $x=0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ldots$
   f. $x=0,\ \pm2\pi,\ \pm4\pi,\ \pm6\pi,\ldots$
   g. $x=\pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ldots$
   h. $x=\pm\pi,\ \pm3\pi,\ \pm5\pi,\ldots$
   i. $x=0,\ \dfrac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi,\ldots$
   j. $x=0,\ \pm\dfrac{1}{2}\pi,\ \pm\pi,\ \pm\dfrac{3}{2}\pi,\ \pm2\pi,\ldots$

4. La función $f(x)=x^3-6x^2$ tiene punto de inflexión en:
   a. $x=0$
   b. $x=2$
   c. $x=4$
   d. $x=6$
   e. $x=0,\ x=2$
   f. $x=0,\ x=4$
   g. $x=0,\ x=6$
   h. $x=2,\ x=4$
   i. $x=2,\ x=6$
   j. $x=4,\ x=6$

5. Una partícula se mueve en línea recta. Si la función $s(t)$ representa la posición s en metros de la partícula después de t segundos, entonces la velocidad de la partícula en el momento $t=a$ es dada por la expresión:
   a. $\lim_{t\to a} s(t)$
   b. $\lim_{t\to 0} s(t)$
   c. $\lim_{t\to a} \left[s(t)-s(a)\right]$
   d. $\int_0^a s(t)\,dt$
   e. $\int_a^x s(t)\,dt$
   f. $\lim_{h\to 0}\dfrac{s(a+h)-s(a)}{h}$
   g. $\lim_{h\to a}\dfrac{s(a+h)-s(a)}{h}$
   h. $\dfrac{s(a+h)-s(a)}{h}$
   i. $s(a+h)-s(a)$
   j. $\lim_{h\to 0}\left[s(a+h)-s(a)\right]$

6. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{12e^x}{3+6e^x}=$
   a. 12
   b. 3
   c. 6
   d. 2
   e. 4
   f. 15
   g. 9
   h. 18
   i. 0
   j. ∞

7. La ecuación de la recta tangente a la curva $y=\tan^{-1}(x)$ en el punto $x=1$ es:
   a. $y=45+\dfrac{1}{2}(x-1)$
   b. $y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}(x-1)$
   c. $y=\dfrac{1}{2}+45(x-1)$
   d. $y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}(x-1)$
   e. $y=45-\dfrac{1}{2}(x-1)$
   f. $y=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(x-1)$
   g. $y=\dfrac{1}{2}-45(x-1)$
   h. $y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}(x-1)$
   i. $y=1+\dfrac{1}{2}(x-45)$
   j. $y=1+\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{\pi}{4})$

8. La velocidad de una masa oscilatoria es dada por la función $v(t)=2\cos(2t)$. Su posición inicial es $s(0)=1$. Su posición en el momento $t=\frac{\pi}{4}$ es:

a. $s(\pi/4)=1$
b. $s(\pi/4)=-1$
c. $s(\pi/4)=\frac{1}{2}$
d. $s(\pi/4)=-\frac{1}{2}$
e. $s(\pi/4)=2$
f. $s(\pi/4)=-2$
g. $s(\pi/4)=0$
h. $s(\pi/4)=4$
i. $s(\pi/4)=-4$
j. $s(\pi/4)=-8$

9. Si $f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$ y $f(1)=5$, entonces $f(e)=$

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. 5
f. 6
g. 7
h. 8
i. 9
j. 10

10. Si la función $f(x)$ es continua y positiva en el intervalo $[a,b]$, entonces el área exacta de la región encerrada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $x=a,\ x=b,\ y=0$ es dada por la expresión:

a. $f(b)-f(a)$
b. $f'(b)-f'(a)$
c. $\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
d. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$
e. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f'(x_i^*)\Delta x$
f. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
g. $\int_a^b f'(x)dx$
h. $\int_a^x f(t)dt$
i. $\int_a^x f'(t)dt$
j. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$

11. $\int_0^3 2xe^{x^2}\,dx =$

a. e^6
b. e^9
c. $2e^6$
d. $2e^9$
e. $6e^6$
f. $6e^9$
g. $e^6 - 1$
h. $e^9 - 1$
i. $6(e^6 - 1)$
j. $6(e^9 - 1)$

12. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y $g'(x) = f(x)$, entonces:

a. $\int_a^b g(x)\,dx = g(b) - g(a)$
b. $\int_a^b g(x)\,dx = f(b) - f(a)$
c. $\int_a^b g'(x)\,dx = f(b) - f(a)$
d. $\int_a^b g(x)\,dx = f'(b) - f'(a)$
e. $\int_a^b g'(x)\,dx = f'(b) - f'(a)$
f. $\int_a^b f(x)\,dx = f(b) - f(a)$
g. $\int_a^b f(x)\,dx = f'(b) - f'(a)$
h. $\int_a^b f(x)\,dx = g'(b) - g'(a)$
i. $\int_a^b f'(x)\,dx = g(b) - g(a)$
j. $\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$

13. Se hierve agua en una taza y se deja enfriar a temperatura ambiente. Si la temperatura del agua en grados Celsio después de t minutos es dada por la función $T(t) = 30 + 70e^{-t/4}$, ¿cuán rápido está enfriando el agua cuando $t = 4$? (¡Ojo con las unidades!)

a. $\left(30 + \frac{70}{e}\right)\ {}^\circ C/\min$
b. $\left(30 + \frac{70}{e}\right)\ \min/{}^\circ C$
c. $\left(30 - \frac{70}{e}\right)\ {}^\circ C/\min$
d. $\left(30 - \frac{70}{e}\right)\ \min/{}^\circ C$
e. $\left(30 + \frac{70}{4e}\right)\ {}^\circ C/\min$
f. $\left(30 + \frac{70}{4e}\right)\ \min/{}^\circ C$
g. $\left(-\frac{70}{4e}\right)\ {}^\circ C/\min$
h. $\left(-\frac{70}{4e}\right)\ \min/{}^\circ C$
i. $\left(\frac{70}{4e}\right)\ {}^\circ C/\min$
j. $\left(\frac{70}{4e}\right)\ \min/{}^\circ C$

Parte II: [48 puntos] Mostrar todo tu trabajo. Simplifique cada respuesta completamente.

1. [12 puntos] Sea ***R*** la región completamente encerrada por las curvas $\left\{ \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 2x \end{array} \right\}$.

   a. Graficar la región ***R*** cuidadosamente. Debes identificar las curvas e indicar claramente los interceptos y puntos de intersección de las curvas. Sombrea la región. (No tiene que ser a escala.)

   b. Establecer una integral definida que represente el área de la región ***R.***

   c. Evaluar la integral.

2. [12 puntos] Sea ***R*** la región completamente encerrada por las curvas $\left\{ \begin{array}{l} y = \ln x \\ y = 0 \\ y = 1 \\ x = 0 \end{array} \right\}$.

   a. Graficar la región ***R*** cuidadosamente. Debes identificar las curvas e indicar claramente los interceptos y puntos de intersección de las curvas. Sombrea la región. (No tiene que ser a escala.)

   b. Establecer una integral definida que represente el volumen del sólido de revolución generado al girar la región ***R*** alrededor del ***eje y.***

   c. Evaluar la integral.

3. [12 puntos] Sea ***R*** la región completamente encerrada por las curvas $\left\{\begin{array}{l} y = 3 - x \\ y = \dfrac{2}{x} \end{array}\right\}$.

   a. Graficar la región ***R*** cuidadosamente. Debes identificar las curvas e indicar claramente los interceptos y puntos de intersección de las curvas. Sombrea la región. (No tiene que ser a escala.)

   b. Establecer una integral definida que represente el volumen del sólido de revolución generado al girar la región ***R*** alrededor del ***eje y***.

   c. Evaluar la integral.

4. [12 puntos] Calcular el valor máximo absoluto y el valor mínimo absoluto de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ en el intervalo $[0,2]$.