U.P.R. Departamento de Ciencias Matemáticas RUM
MATE 3031 Examen Final 12 de mayo de 2008

Nombre: ____________________________ Sección:____
Profesor: __________________________

Instrucciones: Lea cada pregunta minuciosamente y muestre todo su trabajo. Está prohibido copiar, consultar con otro estudiante y/o preguntar al profesor durante el examen.

1. Resuelva los siguientes ejercicios:

(a) (6 puntos) encuentre el límite $\lim\limits_{x\longrightarrow 5} \dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ si existe

$$\lim_{x\longrightarrow 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\longrightarrow 5} \frac{4-(x-1)}{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}$$
$$= -\lim_{x\longrightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)} = -\frac{1}{4}$$

(b) (5 puntos) determine los intervalos en los cuales la función $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2-4}$ es continua

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$ y por el teorema de continuidad, la función racional es continua para todo x de su dominio, por lo tanto los intervalos de continuidad son: $(-\infty,-2), (-2,2)$ y $(2,\infty)$

(c) (5 puntos) determine la asíntota vertical y horizontal de la función $f(x) = \dfrac{4-3x}{x+3}$

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$

A.V. $\lim\limits_{x\longrightarrow -3^-} \dfrac{4-3x}{x+3} = \dfrac{13}{0^-} = -\infty \Longrightarrow x = -3$ es una asíntota vertical

A.H. $\lim\limits_{x\longrightarrow \pm\infty} \dfrac{4-3x}{x+3} = -3 \Longrightarrow y = -3$ es una asíntota horizontal

(d) (6 puntos) si $f(x) = x\ln x$, halle la derivada de orden 20 de la función f

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x}, \quad f'''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{1.2}{x^3},$$
$$f^{(5)}(x) = -\frac{1.2.3}{x^4}, \cdots, f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}} \text{ para } n \geq 2$$

por lo tanto $f^{(20)}(x) = (-1)^{20} \dfrac{(20-2)!}{x^{20-1}} = \dfrac{18!}{x^{19}}$

(e) (7 puntos) si $f(x) = \ln\left(\frac{(\sin x)(x-1)}{e^{2x}}\right)$,halle $f'(x)$

$$f(x) = \ln\left(\tfrac{(\sin x)(x-1)}{e^{2x}}\right) = \ln(\sin x) + \ln(x-1) - \ln e^{2x} = \ln(\sin x) + \ln(x-1) - 2x$$
$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{x-1} - 2 = \cot x + \frac{1}{x-1} - 2$$

(f) (6 puntos) use diferenciación implícita para hallar $\dfrac{dy}{dx}$ de $\tan(x-y) = \cot x$

derivando implícitamente: $\sec^2(x-y)(1-y') = -\csc^2 x$ y despejando para y' se tiene:

$y' = 1 + \frac{\csc^2 x}{\sec^2(x-y)}$

(g) (5 puntos) determine los puntos de inflexión de la función $f(x) = 2x - \sin 2x$ en el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$

calculamos las dos primeras derivadas:

$f'(x) = 2 - 2\cos 2x, \quad f''(x) = 4\sin 2x = 0 \Longrightarrow 2x = \pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

intervalo	$(\pi/4, \pi/2)$	$(\pi/2, 3\pi/4)$
signo $f''(x)$	$+$	$-$

$\Longrightarrow (\pi/2, f(\pi/2)) = (\pi/2, \pi)$ es un punto de inflexión.

(h) (6 puntos) determine los valores máximos y mínimos locales de la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

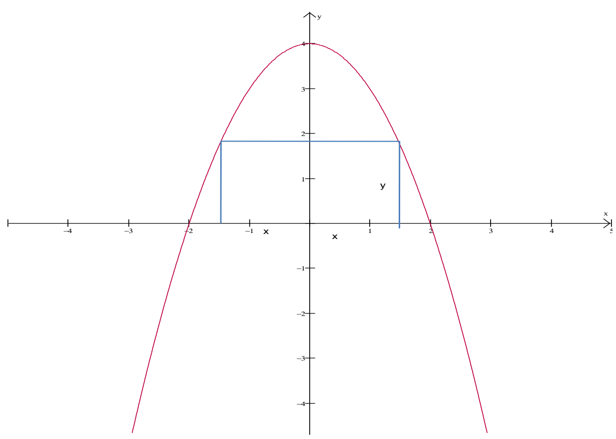
$$Dom(f) = \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1 + x^2 - x(2x)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
signo $f(x)$	$-$	$+$	$-$

$(-1, f(-1)) = (-1, -1/2)$ es un punto de mínimo local

$(1, f(1)) = (1, 1/2)$ es un punto de máximo local

(i) (7 puntos) Halle las dimensiones del rectángulo de mayor área que tiene su base en el eje X y sus otros dos vértices sobre la gráfica de $y = 4 - x^2$.



$A = 2xy = 2x\left(4 - x^2\right) = 8x - 2x^3$

$A' = 8 - 6x^2, \quad A'' = -12x$

$A' = 8 - 6x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{6}} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ como x debe ser positivo, se tiene que $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ y satisface la condiciones de optimalidad $A''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -12\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) < 0$

(j) (4 puntos) si $\int_0^8 f(x)\,dx = 30$, y $F(8) = 20$ halle $F(0)$, donde F es la antiderivada de f

$$\int_0^8 f(x)\,dx = F(8) - F(0) = 20 - F(0) = 30 \Longrightarrow F(0) = -10$$

(k) (6 puntos) evaluar $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

consideramos $u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx$ y se tiene que:

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \int \cos(u)\,du = \sin u + c = \sin(\ln x) + c$$

(l) (5 puntos) evaluar $\int x\sqrt{x-1}dx$

consideramos $u = x-1 \Longrightarrow du = dx$ y se tiene que:

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \int (u+1)\, u^{1/2}du = \int \left(u^{3/2}+u^{1/2}\right) du = \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + c$$

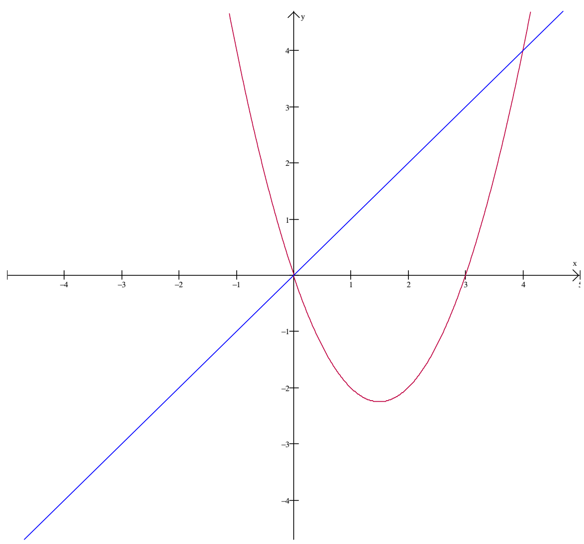
$$= \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + c$$

(m) (7 puntos) evaluar $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x dx$

consideramos $u = \sin x \Longrightarrow du = \cos x dx, x = 0, u = 0; x = \pi/2, , u = 1$ y se tiene que:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x dx = \int_0^1 u^4 du = \frac{1}{5}u^5|_0^1 = \frac{1}{5}$$

2. (9 puntos) Halle el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 - 3x$ y $y = x$,

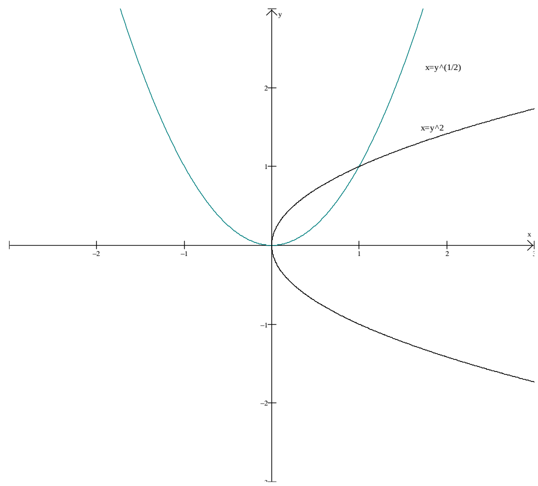


las curvas se cortan en $x = 0$ y $x = 4$ y por lo tanto el área es:

$A = \int_0^4 \left(x - \left(x^2 - 3x\right)\right) dx = \int_0^4 \left(4x - x^2\right) = \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)|_0^4 = \left(2\left(4^2\right) - \frac{1}{3}\left(4^3\right)\right) - (0) = 10.667$

3. Considere las funciones $y = x^2$ y $x = y^2$,

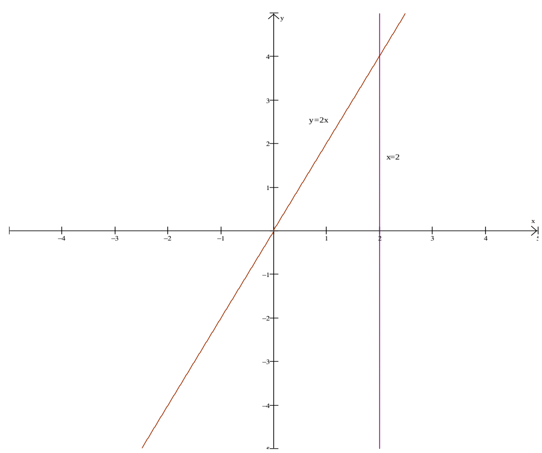
(a) (3 puntos) grafique la región acotada por las gráficas de ambas funciones



(b) (7 puntos) halle el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la región de la parte a) alrededor del eje X por secciones cilíndricas (cylindrical shells).

$V = 2\pi \int_0^1 y \left(y^{1/2} - y^2\right) dy = 2\pi \left(\frac{2}{5}y^{5/2} - \frac{1}{4}y^4\right)|_0^1 = \frac{3}{10}\pi$

4. (10 puntos) Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la región acotada por $y = 2x, \quad x = 2$, y el eje X, alrededor del eje X



$V = \pi \int_0^4 (2x)^2 \, dx = 4\pi \int_0^4 x^2 dx = 4\pi \frac{1}{3}x^3|_0^2 = \frac{32}{3}\pi$