Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez **VA**
Departamento de Ciencias Matemáticas

Examen I Mate 3032 Cálculo II *10 de febrero de 2009*

Nombre ______________________________ *Número de estudiante* ____________
Sección ______________ *Profesor* _______________________

Debe mostrar todo su trabajo. Resuelva todos los problemas, escriba los pasos del procedimiento utilizado. Puede usar calculadora científica, pero solo cuando sea indispensable.

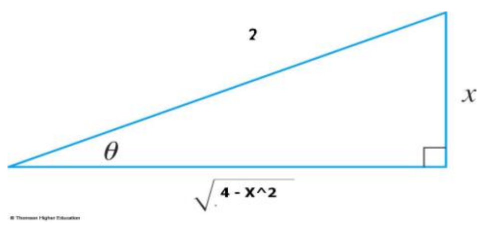
Parte I: El examen tiene un valor de 100 puntos)

1. [9] Evalúe la integral utilizando el método de substitución trigonométrica:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos(\theta)d\theta}{(4sen^2(\theta))(2\cos(\theta))} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{sen^2(\theta)}d\theta = \frac{1}{4}\int \csc^2(\theta)d\theta =$$

$$\frac{1}{4}(-\cot(\theta)) + C = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$$

$x = 2sen(\theta)$
$dx = 2\cos(\theta)d\theta$
$\sqrt{4-x^2} = 2\cos(\theta)$
$\frac{x}{2} = sen(\theta)$



2. [9]

$$\int_0^{\pi/2} \sec^4(t/2)dt = \int_0^{\pi/4} \sec^4(u)2du = 2\int_0^{\pi/4} \sec^2(u)\sec^2(u)du =$$

usar que $\sec^2(u) = 1 + \tan^2(u)$

$$2\int_0^{\pi/4} (1+\tan^2(u))\sec^2(u)du = 2\int_0^1 (1+w^2)dw$$

$$2(w + \frac{w^3}{3})\Big|_0^1 = 2(1+\frac{1}{3}) - 0 = 2(4/3) = \frac{8}{3}$$

$u = t/2$
$2u = t$
$2du = dt$
$t: 0 \to \pi/2$
$u: 0 \to \pi/4$

$w = \tan(u)$
$dw = \sec^2(u)du$
cambiar los limites:
u: $0 \to \pi/4$
$w: \tan(0) \to \tan(\pi/4)$
por lo tanto,
w: $0 \to 1$

3. [9] $\int x\,\text{sen}(3x)\text{dx} = -\frac{x}{3}\cos(3x) + \int \frac{1}{3}\cos(3x)dx = -\frac{x}{3}\cos(3x) + \frac{1}{9}sen(3x) + C$

Usar Integracion por partes:
u = x   dv = sen(3x) dx
du = dx   v =-$\frac{1}{3}\cos(3x)$

4a. [8] Hallar *el valor promedio de la función* $f(x)=4x(10-x)$ en el intervalo [0,10] .

$$f_{ave}=\frac{1}{10}\int_0^{10}4x(10-x)dx=\frac{1}{10}\int_0^{10}(40x-4x^2)dx=$$

$$\frac{1}{10}\left[\frac{40x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}\right]\Bigg|_0^{10}=\frac{1}{10}\left[\frac{20x^2}{}-\frac{4x^3}{3}\right]\Bigg|_0^{10}=\frac{1}{10}\left[20(100)-\frac{4}{3}1000\right]=$$

$$100\left[2-\frac{4}{3}\right]=100\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{200}{3}$$

4b [5] Hallar el valor de c tal que, f(c)= valor promedio de f(x) en [0,10].

$$f(c)=\frac{200}{3}$$

$$4c(10-c)=\frac{200}{3}$$

$$12c(10-c)=200$$

$$3c(10-c)=50$$

$$30c-3c^2=50$$

$$3c^2-30c+50=0$$

a = 3, b = -30, c = 50

$$c=\frac{30\pm10\sqrt{3}}{6}\qquad c_1=7.88\quad y\quad c_2=2.113$$

5. [10] *Evalúe la integral usando fracciones parciales:* $\int\frac{2x^2-x-4}{x^3+x}dx$

$$\int\frac{2x^2-x-4}{x(x+1)}dx=-4\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{6x-1}{x^2+1}dx=-4\ln|x|+3\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$-4\ln|x|+3\ln\left|x^2+1\right|-\tan^{-1}(x)+C$$

descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{2x^2-x-4}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{-4}{x}+\frac{6x-1}{x^2+1}$$

multiplicar por $x\left(x^2+1\right)$:

$$2x^2-x-4=A\left(x^2+1\right)+x\left(Bx+C\right)$$

$$2x^2-x-4=Ax^2+A+Bx^2+Cx$$

$$2x^2-x-4=\left(A+B\right)x^2+Cx+A$$

Obtenemos el siguiente sistema:

A+B = 2, C = -1, A = -4

por lo tanto, B = 6

vea arriba como queda la fraccion

6. Integrales impropias:

a. [8] *Determine si la integral* $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ *converge o diverge.*

En caso de convergencia determine el valor de la integral.

primero, hacemos un cambio de variable:
$u = -\sqrt{x}$
$du = \frac{-1}{2} x^{\frac{-1}{2}}\,dx$
$-2du = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int e^{u}(-2)du \Big]_1^t = \lim_{t\to\infty} -2e^{-\sqrt{x}} \Big]_1^t = -2\lim_{t\to\infty}\left[e^{-\sqrt{t}} - e^{1}\right] = (-2)\left[e^{-\infty} - e\right] = -2[-e] = 2e$$

La integral es convergente

b. [6] *Determine si la integral converge o diverge (Teorema de Comparación):*

$$\int_1^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{x}dx$$

$$\frac{2}{x} \le \frac{2+e^{-x}}{x}$$

vamos a integrar la menor:

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{x}dx = \lim_{t\to\infty} 2\int_1^{t} \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty} 2\left[\ln|x|\right]_1^t = 2\lim_{t\to\infty}\left[\ln(t) - \ln(1)\right] = 2\left[\infty - 0\right] = \infty$$

Por el teorema de Comparacion, como la integral menor diverge,

la integral mayor tambien es divergente

$$\int_1^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{x}dx$$

7. [8] La integral que vamos a evaluar es la siguiente:

Escoger de entre las siguientes fórmulas, la más indicada para su evaluación:

$$\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{u^2du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u} + C$$

Primero hacemos un cambio de variable:
$2y^2 = u^2$
$\sqrt{2}y = u$
$y = \frac{1}{\sqrt{2}}u, \quad y^2 = \frac{1}{2}u^2$
$dy = \frac{1}{\sqrt{2}}du$
vea arriba como se simplifica la integral

Parte II

1a. [8] *Aproxime la integral* $\int_0^2 (1+8x^3)dx$ *utilizando la Regla de Simpson con n = 4, es decir, evalúe* S_4 **.**

$$n = 4,\ a = 0,\ b = 2,\ \Delta x = 1/2$$
$$f(x) = 1+8x^3$$
$$\int_0^2 1+8x^3 dx = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]$$
$$\frac{1}{6}\left[f(0)+4f(\tfrac{1}{2})+2f(1)+4f(\tfrac{3}{4})+f(2)\right]=$$
$$\frac{1}{6}\left[1+4(2)+2(9)+4(28)+65\right]=\frac{1}{6}\left[204\right]=34$$

1b. [4] *Halle la cota superior del error cuando la aproximación se efectúa usando la Regla del Punto Medio con n = 8:* M_8**.**

$f(x) = 1+8x^3$

$f'(x) = 24x^2$

$f^2(x) = 48x$

el valor maximo de la segunda derivada

en [0,2] ocurre en 2: 48*2 = 96

por lo tanto, k = 96

La cota superior del error es:

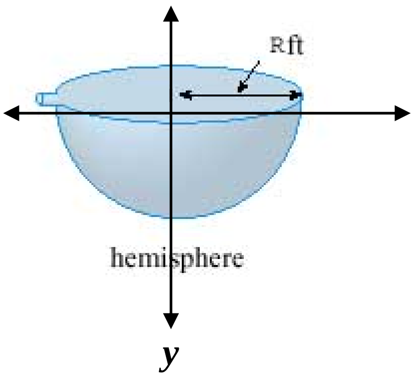
$$E_M \le \frac{k(b-a)^3}{24n^2}$$
$$E_M \le \frac{96(2-0)^3}{24(8^2)}$$
$$E_M \le \frac{96(8)}{24(8^2)}$$
$$E_M \le \frac{12}{24}=\frac{1}{2}=0.5$$

1c. [4] Hallar *cuantos intervalos n, hay que usar, en la Regla del Punto Medio:* M_n *de modo que el error de la aproximación sea menor que 0.001.*

$$E_M \le 0.001$$
$$E_M \le \frac{(96)(2\text{-}0)^3}{24n^2} \le 0.001$$
$$\frac{32}{n^2} \le 0.001$$
$$\frac{n^2}{32} >= \frac{1}{0.001}$$
$$n^2 >= (32)(1000)$$
$$n >= 80\sqrt{5} = 178.88 = 179$$

Parte III

1. [12] *Un tanque tiene la forma de un hemisferio (mitad de una esfera) y su radio es R = 8 pies. El tanque está lleno de agua y se desea vaciar toda el agua por un orificio que se encuentra en la parte superior. (vea el dibujo) Halle el trabajo necesario para vaciar el tanque. (el peso del agua es 62.5 libras/pie*^{3}*)*



Se hace una particion del fluido en rebanadas horizontales ,

el eje de y esta hacia abajo: y va de 0 hasta 8

La relacion entre x y   y esta dada or la ecuacion de un circulo de centro (0,0) y radio 8: $x^2 + y^2 = 64$

El trabajo de mover la rebanada i es $W_i = F_i\ d_i$

$F_i = (\textit{Volumen de un disco})(62.5)$

$W_i = (\pi x^2 \Delta y)(62.5)(y_i)$

sustituye que $x^2 = 64 - y^2$

$W_i = (\pi(64 - y^2)(\Delta y))(62.5)(y_i)$

$$W_{total} = 62.5\pi\int_0^8 \left(64y - y^3\right)dy =$$

$$62.5\pi\left(\frac{64y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^8 =$$

$$62.5\pi\left((32)(8^2) - \frac{8^4}{4}\right) = 62.5\pi\left((2)(8^3\right) =$$

$201061.9298 = 2.01 * 10^5$ *libras – pies*

<u>Bono</u>: [6] *Determine el área de la región acotada por las curvas:*

f(x) = ln(x), el eje de x, y las líneas verticales x =1 y x =e.

$$Area = \int_1^e \ln(x)dx = x\ln(x) - x \ \Big]_1^e =$$

$$\left(e\ln(e) - e\right) - \left(\ln(1) - 1\right) = \left(e - e\right) + 1 = 1$$

$$Area = 1$$

se usa Integracion por partes:

u = ln(x),   dv = dx

du = $\frac{1}{x}dx$,   v = x

uv - $\int$ vdu = xln(x)-$\int \frac{1}{x}xdx = x\ln(x) - \int dx =$

$x\ln(x) - x$