

Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Departamento de Ciencias Matemáticas
Segundo Examen Departamental Mate 3032
1 de octubre del 2008

Nombre _____
Número de estudiante _____
Sección _____

Instrucciones. Tiene 90 minutos para completar el examen. Trate de ser **CLARO** y justifique todo su trabajo. Está permitido el uso de calculadoras científicas.

1. (10 puntos) Encuentre la longitud de arco de la gráfica de $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ en el intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$:

2. (10 puntos) Halle el área de la superficie formada al rotar la gráfica de $y = x^2$, $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ alrededor del eje de y :

3. (10 puntos) Las paredes verticales de un tanque de gasolina tienen la forma de la región formada por las curvas $y = \frac{1}{2}x^2$ y $y = 12$, medidos en pies. Halle la fuerza hidrostática sobre una de las paredes verticales si el nivel de gasolina en el tanque es de 8 pies. La densidad de la gasolina es de 42 libras/pies³.

4. (10 puntos total) Considere la región R acotada por las curvas $y = x + 2$, y $y = x^2$:

- a. (3 puntos) Dibuje la región R .
- b. (7 puntos) Halle \bar{x} , la coordenada de x del centroide.

5. (10 puntos) El aire en una habitación, cuyo volumen es de 180 m^3 , contiene inicialmente 0.15% de bióxido de carbono. Aire fresco con solo 0.15% de bióxido de carbono fluye hacia la habitación a razón de $2 \text{ m}^3/\text{min}$, y el aire ya mezclado sale a la misma razón. Encuentre el por ciento de bióxido de carbono en la habitación como función del tiempo. ¿Que pasa a la larga con la concentración de bióxido de carbono en la habitación?

6. (10 puntos total) Considere la ecuación diferencial $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} = y$:

- a. (5 puntos) Verifique que para C una constante, la familia $y = Cx + C^2$, es solución de la ecuación.
- b. (3 puntos) Verifique que $y = -\frac{1}{4}x^2$ es una solución de la ecuación diferencial.
- c. (2 puntos) Verifique que $y = -\frac{1}{4}x^2$ **no** se puede obtener de la familia de soluciones en la parte (a) mediante la selección de un valor particular de C .

7. (10 puntos) Considere la siguiente ecuación diferencial con valor inicial: $y' = y$, $y(0) = 1$. Aproxime $y(1)$ utilizando el método de Euler con paso $h = 0.2$. ¿Que número irracional es $y(1)$?

8. (10 puntos total) Considere la ecuación diferencial $(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} = xy$:

a. (7 puntos) Halle la solución general de esta ecuación.

b. (3 puntos) Halle la solución si $y(0) = 1$

9. (10 puntos total) Considere la familia de curvas $x^2 - y^2 = k^2$, para k una constante arbitraria:

- a. (7 puntos) Halle la familia de funciones ortogonales a la familia de arriba.
- b. (3 puntos) Halle los miembros de la familia que se cortan en el punto $(3, 1)$.

10. (10 puntos total) La razón de crecimiento de cierto tipo de mosca frutera es proporcional al tamaño de la población en cualquier tiempo t , donde t está dado en días:

- a. (5 puntos) Escriba la ecuación diferencial que nos permite encontrar el número de moscas $y(t)$ en cualquier momento t .
- b. (5 puntos) Si después del segundo día el número de moscas es 200 y después del cuarto día es 500, halle la población inicial de moscas, es decir, $y(0)$.

11. BONO (7 puntos) ¿Para que valores de k la función $y = e^{kx}$ es solución a $3y'' - 5y' - 2y = 0$?