

**Universidad de Puerto Rico**  
**Recinto de Mayagüez**  
Departamento de Ciencias Matemáticas  
Segundo Examen Departamental Mate 3032  
1 de octubre del 2008

Nombre \_\_\_\_\_  
Número de estudiante \_\_\_\_\_  
Sección \_\_\_\_\_

**Instrucciones.** Tiene 90 minutos para completar el examen. Trate de ser **CLARO** y justifique todo su trabajo. Está permitido el uso de calculadoras científicas.

1. (10 puntos) Encuentre la longitud de arco de la gráfica de  $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$  en el intervalo  $[\frac{1}{2}, 2]$ :

2. (10 puntos) Halle el área de la superficie formada al rotar la gráfica de  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq \sqrt{2}$  alrededor del eje de  $y$ :

3. (10 puntos) Las paredes verticales de un tanque de gasolina tienen la forma de la región formada por las curvas  $y = \frac{1}{2}x^2$  y  $y = 12$ , medidos en pies. Halle la fuerza hidrostática sobre una de las paredes verticales si el nivel de gasolina en el tanque es de 8 pies. La densidad de la gasolina es de 42 libras/pies<sup>3</sup>.

4. (10 puntos total) Considere la región  $R$  acotada por las curvas  $y = x + 2$ , y  $y = x^2$ :

- a. (3 puntos) Dibuje la región  $R$ .
- b. (7 puntos) Halle  $\bar{x}$ , la coordenada de  $x$  del centroide.

5. (10 puntos) El aire en una habitación, cuyo volumen es de  $180 \text{ m}^3$ , contiene inicialmente  $0.15\%$  de bióxido de carbono. Aire fresco con solo  $0.15\%$  de bióxido de carbono fluye hacia la habitación a razón de  $2 \text{ m}^3/\text{min}$ , y el aire ya mezclado sale a la misma razón. Encuentre el por ciento de bióxido de carbono en la habitación como función del tiempo. ¿Que pasa a la larga con la concentración de bióxido de carbono en la habitación?

6. (10 puntos total) Considere la ecuación diferencial  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} = y$ :

- a. (5 puntos) Verifique que para  $C$  una constante, la familia  $y = Cx + C^2$ , es solución de la ecuación.
- b. (3 puntos) Verifique que  $y = -\frac{1}{4}x^2$  es una solución de la ecuación diferencial.
- c. (2 puntos) Verifique que  $y = -\frac{1}{4}x^2$  **no** se puede obtener de la familia de soluciones en la parte (a) mediante la selección de un valor particular de  $C$ .

7. (10 puntos) Considere la siguiente ecuación diferencial con valor inicial:  $y' = y$ ,  $y(0) = 1$ . Aproxime  $y(1)$  utilizando el método de Euler con paso  $h = 0.2$ . ¿Que número irracional es  $y(1)$ ?

8. (10 puntos total) Considere la ecuación diferencial  $(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} = xy$ :

a. (7 puntos) Halle la solución general de esta ecuación.

b. (3 puntos) Halle la solución si  $y(0) = 1$

9. (10 puntos total) Considere la familia de curvas  $x^2 - y^2 = k^2$ , para  $k$  una constante arbitraria:

- a. (7 puntos) Halle la familia de funciones ortogonales a la familia de arriba.
- b. (3 puntos) Halle los miembros de la familia que se cortan en el punto  $(3, 1)$ .

10. (10 puntos total) La razón de crecimiento de cierto tipo de mosca frutera es proporcional al tamaño de la población en cualquier tiempo  $t$ , donde  $t$  está dado en días:

- a. (5 puntos) Escriba la ecuación diferencial que nos permite encontrar el número de moscas  $y(t)$  en cualquier momento  $t$ .
- b. (5 puntos) Si después del segundo día el número de moscas es 200 y después del cuarto día es 500, halle la población inicial de moscas, es decir,  $y(0)$ .

11. BONO (7 puntos) ¿Para que valores de  $k$  la función  $y = e^{kx}$  es solución a  $3y'' - 5y' - 2y = 0$ ?