Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Departamento de Ciencias Matemáticas

Examen II - Mate 3032   Cálculo II   4 de marzo de 2009

Nombre ________________________________ *Número de estudiante* ______________

Sección _______________   *Profesor* _________________________

Debe mostrar todo su trabajo. Resuelva todos los problemas, escriba los pasos del procedimiento utilizado. Puede usar calculadora científica, pero solo cuando sea indispensable.

(El examen tiene un valor de 100 puntos)

1. *(12%) Hallar la longitud de arco de la curva:*

$$x=\frac{1}{3}\ y^2+2\ ^{\frac{3}{2}}\ ,\ 0<\mathrm{y}<1$$

$$x=\frac{1}{3}\ y^2+2\ ^{\frac{3}{2}}\ ,\ 0<\mathrm{y}<1$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{3}*\frac{3}{2}\ y^2+2\ ^{1/2}\ 2y\ =\frac{1}{2}\ 2y\ \ y^2+2\ ^{1/2}=y\ \ y^2+2\ ^{1/2}$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=y^2\ \ y^2+2$$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+y^2\ \ y^2+2}\ dy=\int_0^1\sqrt{1+y^4+2y^2}dy=\int_0^1\sqrt{\ y^2+1\ ^2}dy=$$

$$L=\int_0^1\ y^2+1\ dy=\frac{y^3}{3}+y\ \ \Big|_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

2. (12%) Halle el área de la superficie que se genera cuando el gráfico $y^3=3x$ 0 < x <9 gira alrededor del eje y .

Solución:

$$A=2\pi\int x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy,\ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{3}(3)y^2=y^2\ ,1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=1+y^4$$

Sustituyendo en la fórmula x por $\frac{1}{3}y^3$ y poniendo los limites correspondientes de la y tenemos:

A= $2\pi\int_0^3\frac{y^3}{3}\sqrt{1+y^4}dy=\frac{2\pi}{3}\frac{1}{4}\int_0^3\ 1+y^4\ ^{\frac{1}{2}}4y^3dy=\frac{\pi}{6}\frac{2}{3}\ 1+y^4\ ^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=\frac{\pi}{9}\ 82\sqrt{82}-1$

3. (12%) Se tiene una lámina cuya fórmula corresponde a un triángulo isósceles de lado $\sqrt{5}$ pies y base 2 pies. La lámina se encuentra sumergida en agua con el vértice vertical hacia arriba y la base paralela a la superficie del agua. El vértice vertical se encuentra a 2 pies de la superficie del agua.

Determine la fuerza que el agua ejerce sobre una cara de la lámina. Densidad del agua = 62.5 $\frac{lbs}{pies^3}$

Solución.

Tomemos el sistema de coordenadas en la superficie del agua y la dirección positiva del y hacia abajo. El eje y será perpendicular a la base y pasando por el vértice superior del triángulo con coordenadas (0,3)

$$\Delta A=2x\Delta y,\ p=\rho y,\ \Delta F=2\rho xy\Delta y,\ F=2\rho\int_2^4 xydy$$

¿Por qué la y varía de 2 a 4? La altura del triángulo la podemos determinar aplicando el teorema de Pitágora $(\sqrt{5})^2=h^2+1,\Rightarrow h=2$, luego la y va de y=1 a y=2. Ahora debemos ver la relación entre y y x.

Por triángulos semejantes tenemos:

$\frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ \ y-2$. Sustituyendo en la fórmula para F tenemos

$$F=\rho\int_2^4(y-2)ydy=\rho\left(\frac{y^3}{3}-y^2\right)_2^4=\rho\left[\frac{64}{3}-16-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right]=\rho\left(\frac{56}{3}-12\right)=\rho\left(\frac{20}{3}\right)\approx 416.67\ \text{lbs}$$

4. *(10%) Hallar la primera coordenada $\bar{X}$ del centroide $(\bar{X}, \bar{Y})$ de una lámina que está representada por la región acotada por las siguientes curvas:*

$y = e^{3x}$, y = 0, y las lineas x = 0, x = 1

Hallar $\bar{X}$:

el denominador es $\rho \int_0^1 e^{3x} dx = \rho \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^1 = \rho \left(\frac{1}{3} \right) e^3 - e^0 = \rho \left(\frac{1}{3} \right) e^3 - 1$

El momento con respecto al eje de y M_y es el numerador:

el numerador M_y es $\rho \int_0^1 x e^{3x} dx$, aquí necesitamos integración por partes:

u = x, du = dx, dv = $e^{3x} dx$, v = $\frac{1}{3} e^{3x}$, *sustituye en* uv- $\int$vdu

$$\rho \int_0^1 x e^{3x} dx = \rho \left(\frac{x}{3} e^{3x} - \int_0^1 \frac{1}{3} e^{3x} dx \right) = \rho\left(\frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \right) \Big|_0^1 = \rho \left[\frac{e^{3x}}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right) \right]_0^1 =$$

$$\rho \left[\frac{e^3}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \frac{e^0}{3} \left(0 - \frac{1}{3} \right) \right] = \rho \left[\left(\frac{e^3}{3} \left(\frac{2}{3} \right) \right) - \frac{e^0}{3} \left(0 - \frac{1}{3} \right) \right] = \rho \left[\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} \right]$$

$$\bar{X} = \frac{M_y}{masa_{total}} = \frac{\rho \left[\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} \right]}{\frac{\rho}{3} \left(e^3 - 1 \right)} = \frac{1}{3} \frac{\left(2e^3 + 1 \right)}{\left(e^3 - 1 \right)} = 0.6857$$

5. *(12%) Halle la solución del problema de valor inicial:*

$$xy' + y = y^2;\ y(1) = -1$$

$$xy' = y^2 - y$$

$$x\frac{dy}{dx} = y\ \ y-1$$

$$\frac{1}{y\ \ y-1}dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{1}{y\ \ y-1}dy = \int\frac{1}{x}dx,\ \text{vamos a descomponer}\ \frac{1}{y\ \ y-1}$$

en fracciones parciales.

$$\frac{1}{y\ \ y-1} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}$$

$1 = A\ \ y\text{-}1\ + By$

$1 =\ \ A+B\ \ y$ -A, igualando coeficientes tenemos que:

A+B=0 y A = -1, por tanto B = 1.

$$\frac{1}{y\ \ y-1} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} = \frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1}$$

$$\int\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1}dy = \int\frac{1}{x}dx$$

$$-\ln|y| + \ln|y\text{-}1| = \ln|x| + C$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + C$$

$$e^{\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|} = e^{\ln|x|+C}$$

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = e^C|x|$$

$\dfrac{y-1}{y} = \pm\ e^C\ \ x$, sea A = $\pm\ e^C$

$1-\dfrac{1}{y} = A\ x$, vamos a resolver por y: 1-Ax = $\dfrac{1}{y}$

$y = \dfrac{1}{1-Ax}$, ésta el la solución general, ahora sustituye que si x=1, y = -1

$-1=\dfrac{1}{1\text{-}A\ \ }$, -1+A=1 ; A = 2 y la solución particular es $y=\dfrac{1}{1-2x}$

6. *(6%) Verifique que* $y = c_1e^{-4x} + c_2e^{-2x}$ es solución de $y'' + 6y' + 8y = 0$.

Solución: $y' = -4c_1e^{-4x} - 2c_2e^{-2x},\ y'' = 16c_1e^{-4x} + 4c_2e^{-2x}$ Sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$16c_1e^{-4x} + 4c_2e^{-2x} + 6\ \ -4c_1e^{-4x} - 2c_2e^{-2x}\ \ + 8(c_1e^{-4x} + c_2e^{-2x})? = 0$$

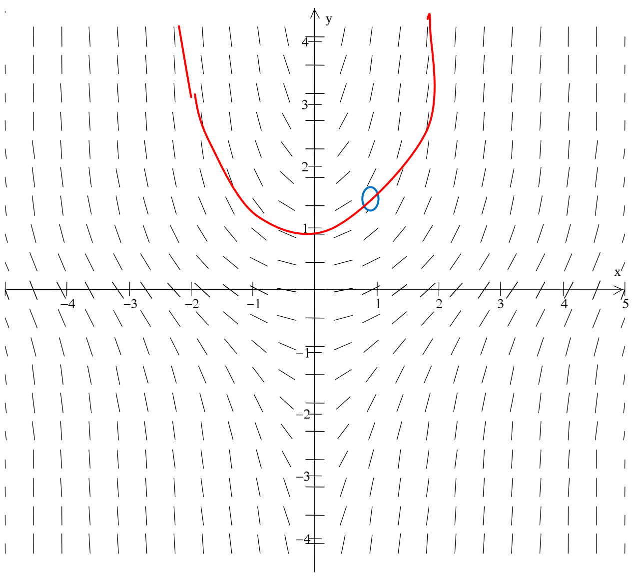
$$16c_1e^{-4x} + 4c_2e^{-2x} - 24c_1e^{-4x} - 12c_2e^{-2x} + 8c_1e^{-4x} + 8c_2e^{-2x}? = 0$$

Como vemos el lado de la izquierda se reduce a 0 , luego $y = c_1e^{-4x} + c_2e^{-2x}$ es solución de la ecuación

7. *(8%) Conteste las siguientes preguntas, con respecto al problema de valor inicial:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}\ 1+y^2 \quad , \quad \mathrm{y}(0) = 1$$

A continuación vemos el campo de pendientes de su ecuación diferencial:



(a) Dibuje la solución del problema de valor inicial.
(b) Utilice su dibujo para estimar el valor ***y(1).***

$y\ 1\ \approx 2$

8. (12%)Utilice el Método de Euler con tamaño del escalón Δx = h = 0.2 para estimar y(1.8) ***, donde y(x) es la solución del problema de valor inicial. Redondee su contestación a 4 lugares decimales.***

$$y' = x \ \ 1 - y \ \ , \ \ y(1) = 0$$

x_i's	y_i's
$x_0 = 1$	$y_0 = 0$
$x_1 = 1.2$	$y_1 = 0.2$
$x_2 = 1.4$	$y_2 = 0.392$
$x_3 = 1.6$	$y_3 = 0.5622$
$x_4 = 1.8$	$y_4 = 0.7023$

F(x, y) = x(1 - y)

$y_1 = y_0 + h\,F(x_0, y_0) = 0 + 0.2(1(1 - 0) = $ **0.2**

$y_2 = y_1 + h\,F(x_1, y_1) = 0.2 + 0.2(1.2(1 - 0.2)) = 0.2 + 0.2(.96) = 0.2 + 0.192 = $ **0.392**

$y_3 = y_2 + h\,F(x_2, y_2) = 0.392 + 0.2(1.4(1 - 0.392)) = 0.392 + 0.2(1.4(0.608)) =$

$0.392 + 0.2(0.8512) = 0.392 + 0.17024 = $ **0.56224**

$y_4 = y_3 + h\,F(x_3, y_3) = 0.56224 + 0.2(1.6(\ 1 - 0.56224) = 0.56224 + 0.2(1.6(0.43776)) = 0.56224 + 0.2(0.700416)$

$y_4 = 0.56224 + 0.1400832 = $ **0.7023232**

9. Se cultiva una población de 500 bacterias en un laboratorio. Si se observa que la velocidad de crecimiento de esta población es directamente proporcional a la cantidad de bacterias en cada tiempo t (t en horas).

(a) (3%) Escriba la ecuación diferencial con su condición inicial.

i) Velocidad de crecimiento es directamente proporcional a la población: $\frac{dP}{dt} = kP$

La condición inicial es ; t = 0, P(0)= 500

ii) Resolviendo la ecuación diferencial:

$\frac{dP}{P} = kdt \quad \rightarrow \quad \int \frac{dP}{P} = \int kdt$

$Ln(P) = kt + C \quad \rightarrow \quad P(t) = e^{kt+C} = Ae^{kt}$

$P(t) = Ae^{kt}$

Se duplica cuando t=2, entonces $1000 = 500e^{2k} \quad \rightarrow \quad k = Ln(2^{1/2})$

iii) Finamente $P(t) = 500e^{Ln(2^{1/2})t} = (500)2^{t/2}$

(b) (4%)Resuelva la ecuación, por separación de variables, para determinar la población en un tiempo t cualquiera.

Resolviendo la ecuación diferencial:

$\frac{dP}{P} = kdt \quad \rightarrow \quad \int \frac{dP}{P} = \int kdt$

$Ln(P) = kt + C \quad \rightarrow \quad P(t) = e^{kt+C} = Ae^{kt}$

$P(t) = Ae^{kt}$

Población inicial 500, entonces $P(t) = 500e^{kt}$

(c) (4%)Halle una ecuación para la población de estas bacterias, si se sabe que la población se duplicó después de 2 horas. Justificar su respuesta.

Se duplica cuando t=2, entonces $1000 = 500e^{2k} \quad \rightarrow \quad k = Ln(2^{1/2})$

Finamente $P(t) = 500e^{Ln(2^{1/2})t} = (500)2^{t/2}$

(d)(5%) Hallar el número de bacterias que hay a las 5 horas.

$$P(5) = 500 \ \ 2^{5/2} \ \ = 500 \ \ 5.656854249 \ \ \approx \ 2828$$

Bono:

(6%) *Resuelva la ecuación diferencial:*

$$\frac{dx}{dt} = 1 - t + x - tx$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - t + x - tx$$

$$\frac{dx}{dt} = \ 1 - t \ \ + x \ 1 - t$$

$$\frac{dx}{dt} = \ 1 - t \ \ \ 1 + x$$

$$\frac{1}{1+x} dx = \ 1 - t \ \ dt$$

$$\int \frac{1}{1+x} dx = \int \ 1 - t \ dt$$

$$\ln\left|1+x\right| = t - \frac{t^2}{2} + C$$

$$e^{\ln\left|1+x\right|} = e^{t - \frac{t^2}{2} + C}$$

$$\left|1+x\right| = e^{C} e^{t - \frac{t^2}{2}}$$

$$1 + x = \pm e^{C} e^{t - \frac{t^2}{2}}, \text{ sea A} = \ \pm e^{C}$$

$$x = \text{-}1 \ \ \pm \text{A } e^{t - \frac{t^2}{2}}$$