Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Departamento de Ciencias Matemáticas

Examen III
Mate 3032 - Cálculo II
2 de abril de 2008

Nombre ________________________________ Número de estudiante ______________

Sección _______________ Profesor _________________________

Debe mostrar todo su trabajo. Resuelva todos los problemas. Puede usar calculadora científica.

I . Determine si la sucesión (a_n) converge o diverge. Si la sucesión es convergente encuentre el límite:

1. $a_n = \dfrac{5+5n^2}{n+n^2}$ (3 puntos)

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+5n^2}{n+n^2} = 5$ por lo tanto, la sucesión es convergente.

2. $a_n = \dfrac{\ln(2+e^n)}{3n}$ (5 puntos) $f(n) = a_n$, $f(x) = \dfrac{\ln(2+e^x)}{3x}$

Verifico: $\dfrac{\ln(valor \;\; positivo \;\; grande)}{\infty} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Usamos f(x) con la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2+e^x)}{3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2+e^x}e^x}{3} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2+e^x} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 3$$

La sucesión converge a 3.

II

a. Utilice series para expresar 0.23232323……como un cociente de enteros: (3 puntos)

.23232323… = .23 + .0023 + .000023 + .00000023 + … es una serie geométrica con a = .23 y

r = 0.01, como |r|<1 la serie converge a $S = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{.23}{1-.01} = \dfrac{.23}{.99} = \dfrac{23}{99}$

b. El término general de la sucesión S_n de sumas parciales de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(\tan^{-1}(k) - \tan^{-1}(k+1))$ es

$$S_K = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(k+1) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}(k+1) \quad \text{(2 puntos)}$$

c. ¿Acaso la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$ es convergente o divergente? _____converge______.(1 punto)

serie p con p >1, ya que e = 2.718281828…, por lo tanto la serie converge

III. Determine si la serie converge o diverge. Si converge determine la suma:

1. (5 puntos)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+3^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4^n}+\sum_{n=1}^{\infty}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Son dos series geométricas convergentes:

La primera tiene: a = 5/4 y r = ¼

Converge a $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{5}{3}$

La segunda serie tiene: a = ¾ y r = ¾, por lo tanto, también es convergente y su suma es:

$$\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$$

Por tanto la serie converge a la suma de estos dos límites: 3 + 5/3 = 14/3

2. (6 puntos) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+4n+3}$

Es una expresión racional donde el denominador Factoriza : (n + 1) (n + 3),vamos a descomponer en fracciones

$$\frac{2}{(n+1)(n+3)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+3}=\frac{1}{n+1}+\frac{-1}{n+3}$$

$$2=A(n+3)+B(n+1)$$

$$2=(A+B)n+(3A+B)$$

$$\begin{cases}A+B=0\\3A+B=2\end{cases}$$

$$B=-1, A=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)(n+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right]$$

$$S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+....$$

$$.....\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$

parciales: $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

IV. Clasifique las siguientes series como convergentes o divergentes, presentando argumentos que justifiquen bien el resultado. (5 puntos cada uno)

a. $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n^2}$

Es una serie de términos positivos, el criterio de divergencia no es aplicable ya que el

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{n^2}}=0$$

Podemos usar la prueba de la

$$f(x)=\frac{x}{e^{x^2}}$$

Integral: $\int_{x=0}^{\infty}e^{-x^2}xdx=\lim_{t\to\infty}\int_{x=0}^{t}e^{-x^2}xdx=\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{x=0}^{x=t}=$

$$\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{t^2}}-\frac{1}{e^0}\right)=\frac{1}{2}$$

La integral impropia es convergente, la serie también lo es.

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}$

Es una serie de términos positivos, el criterio de divergencia no es aplicable ya que el

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}+\frac{n}{n^3}+\frac{n^2}{n^3}}{\sqrt{\frac{1}{n^6}+\frac{n^2}{n^6}+\frac{n^6}{n^6}}}=\frac{0}{1}=0$$

Podemos usar una prueba de comparación, comparar con $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^6}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ que sabemos que diverge.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2+n^3}{\sqrt{1+n^2+n^6}}=1$$

Ambas series se portan igual ya que el resultado es un número positivo finito. Las dos divergen.

c. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n sen(\frac{n}{2})$ Criterio de Divergencia, el límite del enésimo término No existe. Por lo tanto la serie es divergente,	d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n+1}}$ Es una serie de términos positivos, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Podemos usar una de las pruebas de Comparación Sabemos que $0 \le sen^2 n \le 1$ $\frac{0}{n\sqrt{n+1}} \le \frac{sen^2 n}{n\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ Esta última es una serie p, p=3/2, por lo tanto, converge. Por lo tanto la serie menor también es convergente.

V. (6 puntos) Escriba una serie de potencias para la función: $\frac{x^3}{4+x}$

$$\frac{x^3}{4+x} = x^3\frac{1}{4+x} = x^3\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{x}{4}}\right) = \frac{x^3}{4}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{4}\right)}\right)$$

$$\frac{x^3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-x}{4}\right)^n = \frac{x^3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+3}}{4^{n+1}}$$

VI. (5 puntos)Halle el valor exacto de la suma: $3+\frac{9}{2!}+\frac{27}{3!}+\frac{81}{4!}+...$

Esta suma tiene semejanzas con la serie de Maclaurin para e^x:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^n}{n!}$$

$$e^x-1=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^n}{n!}$$

La expresión anterior es semejante a esta última expresión, pero donde está x tiene 3, en otras palabras, x=3. Por lo tanto al substituir 3 por x en $e^x - 1$ obtenemos el valor $\mathbf{e^3 - 1}$

VII. (10 puntos) Determine el *radio y el intervalo de convergencia* de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n2^n}$

Nota: Esta serie de potencias se desarolla alrededor de x = -4. Usaremos la prueba del Cociente, junto a la condición de convergencia: < 1:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1,\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+4)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\frac{n2^n}{(x+4)^n}\right|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+4)^n(x+4)}{(x+4)^n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2^n}{2^n 2}\right|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+4)}{1}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\right|<1$$

$$|x+4|\cdot 1\cdot\frac{1}{2}<1,\quad |x+4|<2,\quad -6<x<-2$$

Este es el intervalo de Convergencia, pero falta investigar los extremos: x = -6 y x = -2

El radio de convergencia es R = 2.

x = -6: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-6+4)^n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ esta es la serie armónica alternante y converge.

x=-2: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2+4)^n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ esta es la serie armónica que es divergente.

Solución: Intervalo de convergencia :[-6 , -2) y Radio de Convergencia = 2

VIII(5 puntos cada uno)Determina si las siguientes series convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen. Justifica tu respuesta con razonamiento o procedimiento lógico. En particular, escribe el nombre del criterio o teorema utilizado.

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1+n}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ la primera de estas series converge pues es serie p, con p = 2, pero la

Segunda de estas series diverge, así que la serie con los valores absolutos es divergente, por tanto, no es

Absolutamente convergente. Pero como es una serie alternante hay que ver si satisface el Criterio de Series Alternantes:

2) ¿¿Es decreciente: $b_n \geq b_{n+1}$ ¿

$$\frac{n+1}{n^2} \geq \frac{n+2}{(n+1)^2}, \quad (n+1)^3 > n^3 + 2n^2$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 > n^3 + 2n^2$$

El enunciado es cierto, por tanto la serie es decreciente.

2) ¿ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 0 + 0 = 0$$

Por tanto, se satisfacen las condiciones y la serie

Alternante converge. Por lo tanto, la seire es

Condicionalmente convergente.

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{n^2 \cdot 2^n}$

Primero hay que investigar la serie tomando los valores absolutos de los términos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2 2^n}$$

Ratio Test :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^2 2^{n+1}} \cdot \frac{n^2 2^n}{n!}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{2^n}{2^n 2} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2} = \infty$$

La serie de los valores absolutos es divergente.

Opcional, en este caso:

Investigar la serie alternante:

¿

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$?

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^2 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n\cdot n\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdots\cdots 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdots\cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1\cdot 1\cdot \infty \cdot \infty \cdots\cdot 1 \cdot \frac{1}{2^3} = \infty$$

No satisface este criterio de SA y tampoco es decreciente.

Por lo tanto, la serie es divergente.

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\arctan n)^n}$ usar la prueba de la raíz en la serie de los valores absolutos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{(\arctan(n))^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\arctan(n)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} < 1$$

Por tanto, La serie converge absolutamente

IX Dado que $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

a. (5 puntos) Halle el desarrollo de $f(x) = x\cos(x^3)$ como una serie de potencias.

$$x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^3)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+1}}{(2n)!}$$

$$= x - \frac{x^7}{2!} + \frac{x^{13}}{4!} - \frac{x^{19}}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{6n+1}}{(2n)!}$$

b. (6 puntos)Use dicho desarrollo para hallar $\int_0^{0.5} x\cos(x^3)dx$ con exactitud de 7 sitios decimales, es decir, con error < 0.00000005.

$$\int_0^{0.5} \left(x - \frac{x^7}{2!} + \frac{x^{13}}{4!} - \frac{x^{19}}{6!} + \ldots.. \frac{(-1)^n x^{6n+1}}{(2n)!} + \ldots\right)dx = \int_0^{0.5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+1}}{(2n)!} dx =$$

$$\int_0^{0.5} x\cos(x^3)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^8}{2!(8)} + \frac{x^{14}}{4!(14)} - \frac{x^{20}}{6!(20)} + \ldots. \frac{(-1)^n x^{6n+2}}{(2n)!(6n+2)} \Big|_0^{0.5} =$$

$$\left[\frac{(.5)^2}{2} - \frac{(.5)^8}{2!(8)} + \frac{(.5)^{14}}{4!(14)} - \frac{(.5)^{20}}{6!(20)}\right] - [0 - 0 + 0 - \ldots. + 0 - \ldots]$$

es una serie alternante, se puede usar el estimado de la serie alternante: $R_n < b_{n+1}$

$b_1 = \frac{(.5)^8}{2!(8)} = 0.000244141$ $\qquad$ $b_2 = \frac{(.5)^{14}}{4!(14)} = 0.000000182$

$b_3 = \frac{(.5)^{20}}{6!(20)} = 0.000000000066227$

$$S \approx S_2 = \frac{(.5)^2}{2} - \frac{(.5)^8}{2!(8)} + \frac{(.5)^{14}}{4!(14)} = .125 - .000244141 + 0.000000182 = .124756041$$

El error será menor que $b_3 = \frac{(.5)^{20}}{6!(20)} = 0.000000000066227$

X Sea $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$.

a. (6 puntos) Encuentre el polinomio de Taylor de grado n = 3, $T_3(x)$ alrededor de a =1

$$T_3 = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$T_3 = 1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{9}\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{8}{27}\frac{(x-1)^3}{6} = 1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{18}(x-1)^2 + \frac{4}{81}(x-1)^3$$

$$\sqrt[3]{x^2} \approx T_3$$

$-------------------$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \qquad f(1) = 1^{\frac{2}{3}} = 1$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \qquad f'(1) = \frac{2}{3}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{9}x^{-\frac{4}{3}} \qquad f''(1) = \frac{-2}{9}$$

$$f'''(x) = \frac{8}{27}x^{\frac{-7}{3}} \qquad f'''(1) = \frac{8}{27}$$

$$f''''(x) = \frac{-56}{81}x^{\frac{-10}{3}}$$

b. (6 puntos) Use la desigualdad de Taylor para estimar la exactitud de la aproximación

$f(x) \approx T_3(x)$ cuando x está en el intervalo $0.8 \le x \le 1.2$.

Vamos a buscar la cota superior de la cuarta derivada en el intervalo indicado:
La cuarta derivada es la siguiente:

$$f''''(x) = \frac{-56}{81}x^{\frac{-10}{3}}$$

Es una función decreciente, M = f^4 (0.8) = (-56/81)x$(0.8)^{-10/3}$= - 1.451851853
M = |M| = 1.451851853=1.452

$$R_3(x) \le \frac{M\,|x-1|^4}{4!} \quad ,0.8 \le x \le 1.2$$

$$R_3(x) \le \frac{(1.452)\cdot(.2)^4}{24} = 0.0000968$$

Este valor es el valor máximo del error cuando utilicemos T_3 para aproximar un valor de f(x) = $x^{2/3}$ si x está en el intervalo [0.8, 1.2].

2 de abril de 2008
G Di Cristina