Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Departamento de Ciencias Matemáticas
Examen III Mate 3032 - Cálculo II
1 de abril de 2009

Nombre ________________________________ *Número de estudiante* ______________
Sección _______________ *Profesor* _________________________

Debe mostrar todo su trabajo. Resuelva todos los problemas. Puede usar calculadora científica pero solo cuando sea indispensable.

Parte I

1. (5 puntos) .Determine si las sucesión siguiente converge o diverge, si converge determine el límite:

a) $\left\{ \operatorname{arcotan}\left(\frac{3n}{3n+5} \right) \right\}$

$$\lim_{N\to\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \operatorname{arcotan} \frac{3n}{3n+5} = \operatorname{arcotan}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{3n+5} \right) = \operatorname{arcotan}\ 1 = \frac{\pi}{4}$$

b) (5 puntos) Halle el límite de la sucesión a_n *donde* a_n *está dado por* $\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n})\ \sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-n}} \right) \right] = 3/2$$

II. Determine si la serie converge o diverge. Si converge determine la *<u>suma</u>:*

1. (5 puntos) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 5\left(\frac{1/2}{1-1/2} \right) - \frac{1/3}{1 - 1/3} = 5 - 1/2 = \frac{9}{2} = 4.5$

Por tanto la serie converge.

2. (6 puntos) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1}$

Respuesta:
Usando fracciones parciales

$\frac{2}{4n^2-1} = \frac{2}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$ *(2 puntos)*

Como

$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$

La serie es teléscópica (1 punto)

Tenemos $S_n = 1 - \frac{1}{2n+1}$ *(1 punto)*

Como $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, *la serie converge(1 punto)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} = 1$ (1 punto)

III. Clasifique las siguientes series como convergentes o divergentes, presentando argumentos que justifiquen bien el resultado. (6 puntos cada uno)

a. $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,(\ln n)^{2}}$$

$$\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x\,(\ln(x))^{2}}dx = \lim_{t\to\infty}\int_{\ln(2)}^{\ln(t)}u^{-2}du = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{\ln(x)}\right]_{2}^{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{\ln(t)}+\frac{1}{\ln(2)}\right] = \frac{1}{\ln(2)}$$

La integral converge, por lo tanto, la serie tambien converge.

b. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n+n^{2}}{\sqrt{1+n^{2}+n^{6}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n+n^{2}}{\sqrt{1+n^{2}+n^{6}}}$$

Usar prueba II Comparación:

$$b_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^6}} = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2+n^3}{\sqrt{1+n^2+n^6}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\sqrt{n^6}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3} = 1$$

ambas series se portan igual, así que ambas son divergentes.

IV. (7 puntos) Escriba una serie de potencias para la función:

$$\frac{x}{9+x^2}$$

$$= \frac{x}{9}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{-x^2}{9}\right)}\right) = \frac{x}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x^2}{9}\right)^n = \frac{x}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n x^{2n}}{9^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{9^{n+1}}\right)$$

V. (8 puntos) Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(n+8)^3}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\dfrac{5^{n+1} x^{n+1}}{(n+9)^3}}{\dfrac{5^n x^n}{(n+8)^3}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{5^{n+1} x^{n+1}}{(n+9)^3} \cdot \frac{(n+8)^3}{5^n x^n}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{5|x|}{1} * \left(\frac{n+8}{n+9}\right)^3\right| = 5|x| \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+8}{n+9}\right)^3 = 5|x| * 1 < 1$$

$$|x| < \frac{1}{5}, \ -\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$$

Investigar los extremos:

$x = -\dfrac{1}{5}, \ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+8)^3}$, converge por el Criterio de la serie Alternante

$x = \dfrac{1}{5}, \ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+8)^3}$, converge, ya que es serie p, con p > 1.

solución: Intervalo de convergencia: $-\dfrac{1}{5} \le x \le \dfrac{1}{5}$

Radio de convergencia: R = $\dfrac{1}{5}$

VI. (7 puntos cada uno)Determina si las siguientes series convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen. Justifica tu respuesta con razonamiento o procedimiento lógico. En particular, escribe el nombre del criterio o teorema utilizado.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Primero investigar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Usar Prueba de Comparación II:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}} = 1$$

Como c = 1, un número positivo finito, y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es serie p, con p = 1/2 y diverge, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Pero la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ es una serie alternante y satisface las dos condiciones del Criterio de serie alternante, así que es condicionalmente convergente.

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

Usar prueba de la razón:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} * \frac{10^n}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{10} \right| = \infty$$

Por lo tanto, la serie es divergente.

c. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2n}{3n+1}\right)^{3n}$$

Usar la Prueba de la Raíz:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{-2n}{3n+1}\right)^{3n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{3n}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{3}\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{8}{27} < 1$$

La serie es absolutamente convergente

VII.

a. *(7 puntos) Hallar el siguiente límite (NO aplique L'Hôpital)*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1^{\,n}\, x^{2n+1}}{2n+1} - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{x}-\frac{\text{x}^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{\text{x}^7}{7}+\frac{\text{x}^9}{9}-\ldots\ldots\ldots\ldots\text{-x}}{x^3} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\text{x}^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{\text{x}^7}{7}+\frac{\text{x}^9}{9}-\ldots\ldots}{\text{x}^3} = \lim_{x\to 0}\ -\frac{1}{3}+\frac{x^2}{5}-\frac{\text{x}^4}{7}+\frac{\text{x}^6}{9}-\ldots\ldots\ldots = \frac{-1}{3} + 0 + 0 + 0 + \ldots\ldots = \frac{-1}{3}$$

VIII. *Dado que* $\mathrm{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

i. *(5 puntos) Halle el desarrollo de* $f(x) = sen(x^3)$ *como una serie de potencias.*

4. $senx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{(2n-1)}}{(2n-1)¡}$, luego $sen\ x^3 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x^3)^{2n-1}}{(2n-1)¡} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{6n-3}}{(2n-1)¡}$

ii. (7 puntos) Utilice esta serie de potencias para hallar $\int_0^{0.5} sen\ x^3\ dx$ *con siete cifras decimales exactas, es decir, que el tamaño del error sea menor que 0.00000005,*

$$\int_0^{0.5} sen\ \mathrm{x}^3 dx = \int_0^{0.5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{6n-3}}{(2n-1)\mathrm{i}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{0.5} \frac{x^{6n-3}}{(2n-1)\mathrm{i}} dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{6n-2}}{(6n-2)(2n-1)\mathrm{i}} =$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^{10}}{(10)(6)} = \frac{0.5^4}{4} - \frac{0.5^{10}}{60} \approx 0.0156087$$

\

IX.

(a) (6 puntos) Aproxime la función f(x) = x ln x con un polinomio de Taylor de grado 3: T3, en a = 1.

. $f'(x) = x\frac{1}{x} + \ln x$, f '(x)=1, f ''(x)= $\frac{1}{x}$, f ''(1) = 1 , f '''(x)=-$\frac{1}{x^2}$, f '''(1) = -1,$f^{(4)}$ (x)=$\frac{2}{x^3}$

Luego el polinomio de Taylor de grado 3 es $T_n(x) = 0 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6}$

.

Así $x \ln x \approx (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6}$

(b) (6 puntos) Use la desigualdad de Taylor para estimar la exactitud de la aproximación cuando $0.5 \le x \le 1.5$

Exactitud de la aproximación en el intervalo dado.

De acuerdo a la desigualdad e Taylor $|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-1|^{n+1}, donde |f^{(n+1)}(x)| \le M$

En nuestro caso *como* $f^{(4)}(x)$ es decreciente en el intervalo $0.5 \le x \le 1.5$ el valor de M es 16(la cuarta derivada evaluada en x = 0.5) , | x-1|$\le \frac{1}{2}$, luego sustituyendo en la fórmula $|R_3(x)| \le \frac{16(\frac{1}{16})}{24}) = \frac{1}{24} = 0.041\bar{6}$

Bono:

(6 puntos) Hallar el valor de la suma siguiente : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!} = e^{\frac{3}{5}}$