Universidad de Puerto Rico

Departamento de Ciencias Matemáticas

Examen IV - Mate 3032 - Cálculo II

4 de mayo de 2009

Recinto Universitario de Mayagüez

Nombre _______________________________ *Número de estudiante*_________________

Sección ______________ *Profesor* ________________________

Debe mostrar todo su trabajo. Resuelva todos los problemas. Puede usar calculadora científica pero solo cuando sea indispensable. El examen tiene un valor de 101 puntos

Parte I

Describa con palabras la región del espacio tridimensional R^3 representado por la desigualdad $x^2+y^2+z^2<2y$ (6 puntos)

$$x^2+y^2+z^2<2y$$

$$x^2+(y^2-2y)+z^2<0$$

$$x^2+(y^2-2y+1)+z^2<0+1$$

$$x^2+(y-1)^2+z^2<1$$

Re *presenta* el interior de una esfera con centro

(0,1,0) y radio 1, es una región abierta.

Hallar la ecuación de una esfera que pasa a través del punto (4, −1, 3) y que tiene centro (2, -3, 2). (6 puntos)

$$r=\sqrt{\ 4\text{-}2\ ^2+\ -1+3\ ^2+\ 3-2\ ^2}$$

$$r=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$$

sustituye que h,k,l = 2,−3,2 y r = 3 en

$$\text{x-h}\ ^2+\ y-k\ ^2+\ z-l\ ^2=\ \text{r}^2$$

$$\text{x-2}\ ^2+\ y+3\ ^2+\ z-2\ ^2=\ 3^2$$

Parte II (3 puntos cada uno a - g)

1. Sean los vectores $\vec{a}=5\vec{i}-\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},\ \vec{c}=3\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$ **. Halle**:

a. $\left|4\vec{a}-5\vec{b}\right|$

$$4(5\vec{i}-\vec{k})-5\ \ 2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}\ \ =$$

$$20\vec{i}-4\vec{k}-10\vec{i}-10\vec{j}+5\vec{k}=$$

$$10\vec{i}-10\vec{j}+\vec{k}$$

su magnitud es:

$$\sqrt{10^2+10^2+1^2}=\sqrt{201}=10.1774$$

b. Un vector paralelo al vector $\vec{c}$ y de longitud 10.

$$10\vec{u}=10\left(\frac{3i+3j+6k}{\sqrt{9+9+36}}\right)=\ 10\left(\frac{3i+3j+6k}{\sqrt{54}}\right)=$$

$$10\left(\frac{3i+3j+6k}{3\sqrt{6}}\right)=10\left(\frac{i}{\sqrt{6}}+\frac{i}{\sqrt{6}}+\frac{2k}{\sqrt{6}}\right)=$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{3}i+\frac{5\sqrt{6}}{3}j+\frac{10\sqrt{6}}{3}k$$

c .El ángulo entre los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{b}\circ\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}$$

$$\cos\theta = \frac{(2i+2j-k)\circ(3i+3j+6k)}{\left|\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\right|\left|\sqrt{3^2+3^2+6^2}\right|} = \frac{6+6+(-6)}{3\sqrt{54}} = \frac{6}{9\sqrt{6}} = \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\sqrt{6}}{9} = 74.20^\circ$$

d. La proyección del vector $\vec{c}$ sobre el vector $\vec{b}$. $\mathrm{Pr}oy_{\vec{b}}\ \vec{c}$

$$\mathrm{Pr}oy_{\vec{b}}\ \vec{c} = \frac{\vec{b}\bullet\vec{c}}{|\vec{b}|}\times\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{b}\bullet\vec{c}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} =$$

$$\frac{6}{3^2}\langle 2i + 2j - k\rangle = \left\langle \frac{4}{3}i+\frac{4}{3}j-\frac{2}{3}k\right\rangle$$

e. Un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$

$$u = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{|\vec{b}\times\vec{c}|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{\sqrt{15^2+(-15)^2+0}} =$$

$$\frac{i(12+3)-j(12+3)+k(6-6)}{15\sqrt{2}} = \frac{15i - 15j + 0k}{15\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}} + 0k$$

f. Volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$

El volumen es igual al producto triple escalar

a = $\langle 5, 0\ -1\rangle$, b = $\langle 2, 2\ -1\rangle$ c = $\langle 3, 3, 6\rangle$

$$\text{vol} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5(12+3) - 0(12+3) - 1(6-6) = 75$$

2. (6 puntos) Encontrar los valores de x tal que los vectores $\langle x, 1, x\rangle$ y $\langle 8, 7, x\rangle$ sean ortogonales.

Si los vectores son ortogonales el producto escalar tiene que ser Cero

$\langle x,1,x\rangle\bullet\langle 8,7,x\rangle = 0$

$8x + 7 + x^2 = 0$

$(x+1)(x+7) = 0$

$x = -1 \qquad x = -7$

Parte III

1. (8 puntos)Hallar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos siguientes: $P(1, 1, -2)$, $Q(-3, -4, 2)$ y $R(-3, 4, 1)$.

$\overrightarrow{PR} = \langle -4, 3, 3 \rangle$, $\overrightarrow{PQ} = \langle -4, -5, 4 \rangle$

$$\vec{n} = \langle a,b,c \rangle = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 3 & 3 \\ -4 & -5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$\vec{n} = i\ 12 + 15\ - j\ -16 + 12\ + k\ 20\ + 12\ = 27i + 4j + 32k$

Sea $P_0 = 1, 1, -2$

sustituyendo en $a\ x\text{-}x_0\ + b\ y - y_0\ + c\ z - z_0\ = 0$

$27\ (x-1)\ 4\ (y-1)\ 32\ (z+2)\ 0$

$27x + 4y + 32z + 33 = 0$

2. (10 puntos) Encontrar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por el punto $(2, -2, 4)$ y es perpendicular al plano que tiene ecuación $-x + 2y + 5z = 12$.

El punto fijo $x_0, y_0, z_0 = 2, -2, 4$ y el vector

que tiene la dirección de la línea es v = $\langle -1, 2, 5 \rangle$

Las ecuaciones paramétricas son:

x = 2 - t, y = -2 + 2t, z = 4 + 5t

Las ecuaciones simétricas son:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{5}$$

3. (7 puntos) Halle el punto donde la recta x = 2 + t, y = 1 - t , z = -1 + 2 t interseca al plano x + 2 y - 5z - 3 = 0

sustituye x, y z en la ecuación del plano y resuelve por t:

$2 + t\ + 2\ 1 - t\ - 5\ -1 + 2t\ - 3 = 0$

2 +t + 2 - 2t + 5 - 10t - 3=0

6 - 11t = 0

$t = \frac{6}{11}$

sustituye en las ecuaciones paramétricas de L

para encontrar el punto de intersección

$x = 2 + \frac{6}{11} = \frac{28}{11}$, $y = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$, $z = -1 + \frac{12}{11} = \frac{1}{11}$

4. Considere las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 7\cos(\theta) \\ y = 10 sen\ \theta \end{cases}$, para $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

a. (5 puntos)Elimine el parámetro para encontrar la ecuación en coordenadas rectangulares

b. (4 puntos)Trace la curva representada por estas ecuaciones en el intervalo $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Indique con flechas la dirección de movimiento sobre de la curva. Explique el resultado obtenido.

Como el angulo θ es un ángulo positivo del primer cuadrante o un ángulo negativo del cuarto cuadrante, cosθ es positivo. Por lo tanto $0 \le x \le 7$

Por otro lado y está asociado con senθ así que como senθ es positivo en el cuadrante 1 y negativo en el cuadrante 4 pues y puede ser positivo o negativo. $-10 \le y \le 10$

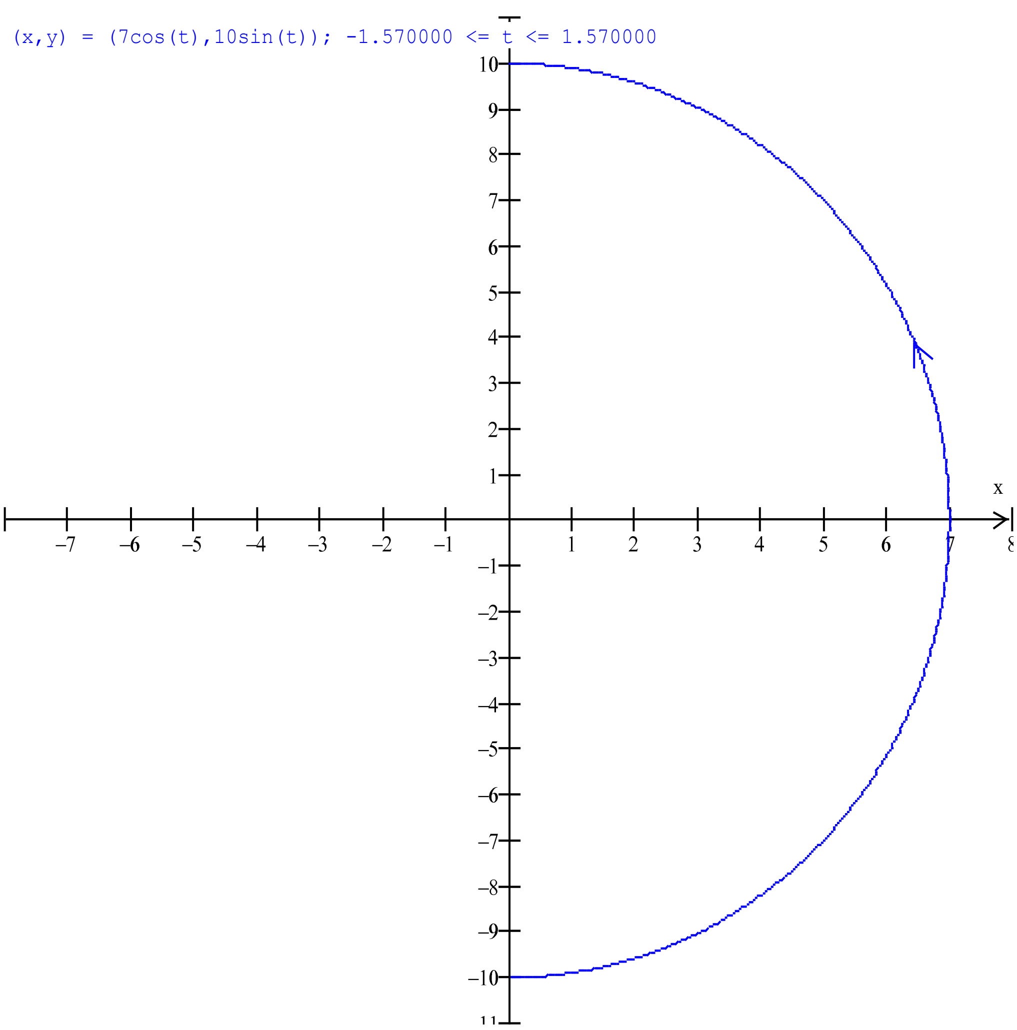
Eliminar el paramétro, usar que

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

sustituye que $\cos\theta = \dfrac{x}{7}$ y que $\text{sen}\theta = \dfrac{y}{10}$

$\dfrac{y^2}{100} + \dfrac{x^2}{49} = 1$, esto es la ecuacion de una elipse, pero tenemos solamente la mitad derecha

t	$x = 7\cos\theta$	$y = 10\ \text{sen}\theta$
$\dfrac{-\pi}{2}$	$x = 0$	$y = -10$
$\dfrac{-\pi}{4}$	$x = \dfrac{7}{\sqrt{2}}$	$y = \dfrac{-10}{\sqrt{2}}$
0	$x = 7$	$y = 0$
$\dfrac{\pi}{4}$	$x = \dfrac{7}{\sqrt{2}}$	$y = \dfrac{10}{\sqrt{2}}$
$\dfrac{\pi}{2}$	$x = 0$	$y = 10$



```
-1.57000  -5.45754 -10.00000
 -1.30833  -0.98332  -9.65754
 -1.04667   3.20314  -8.65760
 -0.78500   5.71246  -7.06825
 -0.52333   6.73911  -4.99770
 -0.26167   6.98360  -2.58691
  0.00000   7.00000   0.00000
  0.26167   6.98360   2.58691
  0.52333   6.73911   4.99770
  0.78500   5.71246   7.06825
  1.04667   3.20314   8.65760
  1.30833  -0.98332   9.65754
  1.57000  -5.45754  10.00000
```

Parte IV

1 a. (6 puntos) Convertir a coordenadas cartesianas la siguiente ecuación, que está expresada en polares.

$$r = 4\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta$$

$r = 4\frac{x}{r} + 2\frac{y}{r}$

multiplicamos por r:

$r^2 = 4x + 2y$

$x^2 + y^2 = 4x + 2y$

$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0$

Completar el cuadrado, para x sumar 4 en ambos lados y para y sumar 1 en ambos lados

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 + 1$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

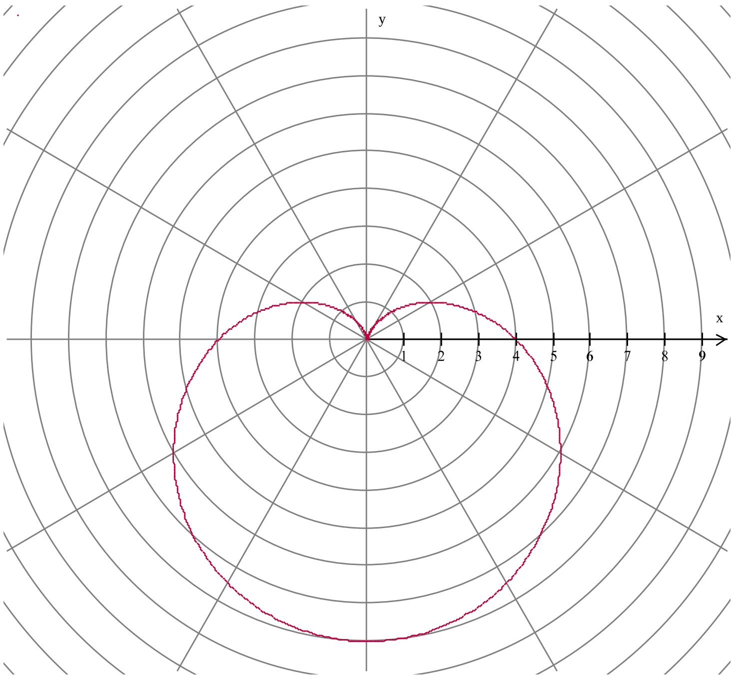
Es un círculo con centro en $(2,1)$ *radio* $\sqrt{5}$

1b. (3 puntos) Identifique la curva .

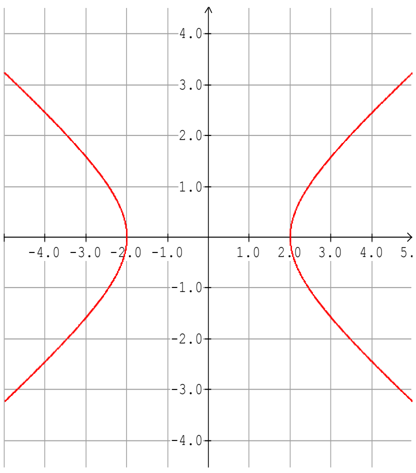
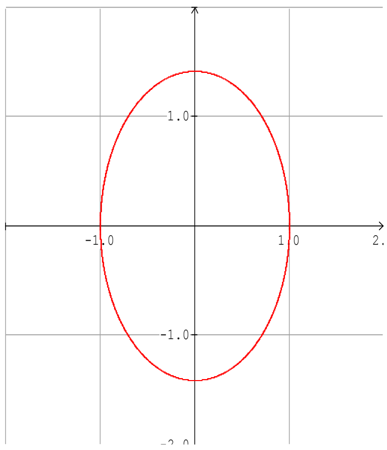
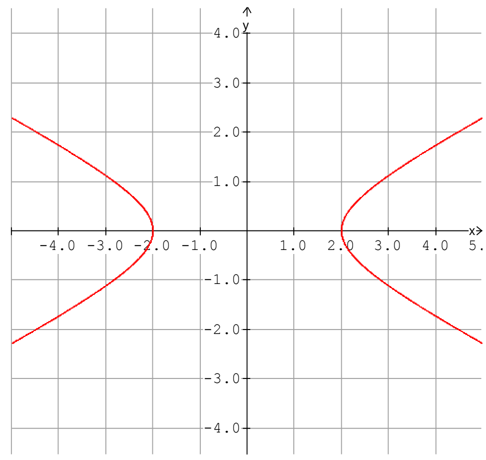
Es un círculo con centro en $(2,1)$ *y radio* $\sqrt{5}$

2. (10 puntos) Dibuje la curva que tiene la siguiente ecuación polar $r = 4 - 4\sin\theta$.

Utilice simetría para hacer la gráfica. Se recomienda hacer una tabla con los pares (r,θ) Que va a utilizar.



3. Considere la superficie cuádratica representada por la ecuación $x^2 - 4y^2 - 2z^2 = 4$.
   Dibuje e identifique esta superficie.
   i. (6 puntos)Para esto, primero encuentre las ecuaciones de las trazas (cortes o secciones) en los Planos xz, yz , xy identifique y dibuje cada una.
   ii. (6 puntos) Luego dibuje e identifique la superficie.

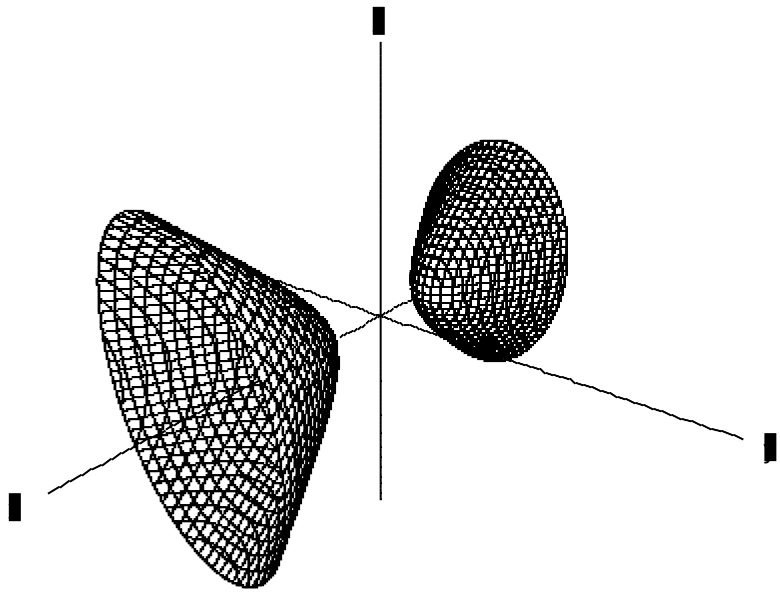
Traza plano xz: y=0	**Traza plano yz: En x=0 no hay traza. Usar x = k, k>=2**	**traza plano xy: z = 0**
<u>Ecuación</u> **<u>$x^2 - 2z^2 = 4$</u>** **<u>Descripción:</u> hipérbola eje real x** **<u>Dibujo</u>**  	**<u>Ecuación:</u>** $\frac{k^2}{4} - \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{2} = 1$ $\frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{2} = \frac{k^2}{4} - 1$ **<u>Descripción:</u> Elipse** **<u>Dibujo</u>**  	**<u>Ecuación</u>** **$x^2 - 4y^2 = 0$** **<u>Descripción</u>: hipérbola eje real x** **<u>Dibujo</u>** 

$$x^2 - 4y^2 - 2z^2 = 4$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{2} = 1$$

hiperboloide de 2 mantas

simetría en el eje de x



Bono. (6 puntos).Paree la grafica con su ecuación Escriba en el espacio provisto en la ecuación la letra correspondiente a la gráfica.

2.______ $r^2 = 9sen2\theta$

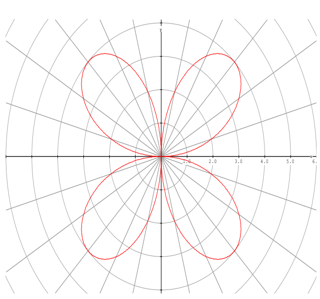
1.______ $r = -4\cos\theta$

3.______ $r = 4sen(4\theta)$

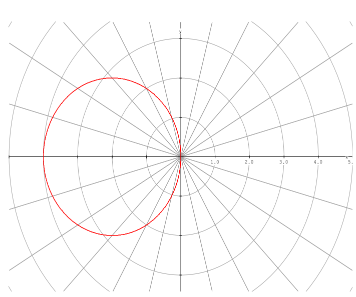
4.______ $r = 4\sin 2\theta$

5.______ $r = 4\ \cos 3\theta$

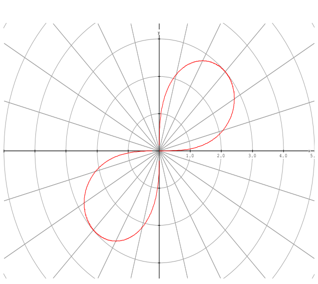
1 $r = 4\sin 2\theta$



2. $r = -4\cos\theta$



3. $r^2 = 9sen2\theta$



4. $r = 4\ \cos 3\theta$