Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Departamento de Matemáticas
MATE 3032 **Examen Final**
Primer Semestre 2001-2002
14 de diciembre de 2001

Nombre: ______________________________

Número de Estudiante: ______________ Sección: ______________

(45 puntos) I. Escoja la contestación correcta. No se dará crédito si no justifica su respuesta.

(3 puntos) 1. Al evaluar la integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ obtenemos:

a : $1/3$ **b** : 1 **c** : 2

d : 3 **e** : $1/2$ **f** : Divergente

(3 puntos) 2. El área de la región $\mathcal{R}$ acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = -x^2 + 1$ es:

a : $\sqrt{2}/2$ **b** : $\sqrt{3}/6$ **c** : $\sqrt{3}/2$

d : $2\sqrt{2}/3$ **e** : $\sqrt{3}/3$ **f** : $\sqrt{3}/4$

(3 puntos) 3. Considere la región $\mathcal{R}$ del problema 2. El volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar $\mathcal{R}$ alrededor del eje x es:

a : 0 **b** : $2\sqrt{2}\pi/3$ **c** : $4\pi/\sqrt{2}$

d : $2\pi/\sqrt{3}$ **e** : $4\pi/\sqrt{3}$ **f** : 1

(3 puntos) 4. El valor promedio de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \pi]$ es:

a : 2π **b** : $2/\pi$ **c** : π

d : 1 **e** : 0 **f** : $\pi/2$

(3 puntos) 5. La solución al problema de valor inicial $y' = \dfrac{\ln x}{xy}, \quad y(1) = 2$ es:

a : $y = \sqrt{4 + (\ln x)^2}$ **b** : $y = \dfrac{8x}{(1+x)^2}$ **c** : $y = x(1 + x^2)$

d : $\dfrac{e^x}{x^2/2}$ **e** : $y = x + \sqrt{1 + \ln x}$ **f** : $y = 2 + 2\ln x$

(3 puntos) 6. El límite de la sucesión $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ es:

a : -1 **b** : 0 **c** : $1/2$

d : 2 **e** : e **f** : Divergente

(3 puntos) 7. La suma de la serie (telescópica) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es:

a : $3/4$ **b** : $1/2$ **c** : $3/5$

d : $9/10$ **e** : $4/5$ **f** : Divergente

(3 puntos) 8. La suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{3^n}$ es:

$\mathbf{a}: 1/3$ $\mathbf{b}: 1/2$ $\mathbf{c}: 3/5$

$\mathbf{d}: 1$ $\mathbf{e}: 3$ $\mathbf{f}:$ Divergente

(3 puntos) 9. ¿Cuál(es) de las siguientes series convergen?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

a : ninguna **b** : 1 **c** : 2 **d** : 3

e : 1 y 2 **f** : 1 y 3 **g** : 2 y 3 **h** : todas

(3 puntos) 10. El radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{(x+2)^n}{(n+7)^2 3^n}$ es:

$\mathbf{a}: 0$ $\mathbf{b}: 1$ $\mathbf{c}: 2$

$\mathbf{d}: 3$ $\mathbf{e}: 1/3$ $\mathbf{f}: \infty$

(3 puntos) 11. Si $\mathbf{u} = \langle -1, \sqrt{2}, 3 \rangle$, entonces $\|\mathbf{u}\|$ es:

$\mathbf{a}: 2+\sqrt{2}$ $\mathbf{b}: 0$ $\mathbf{c}: 4+\sqrt{2}$

$\mathbf{d}: \sqrt{10}$ $\mathbf{e}: \sqrt{12}$ $\mathbf{f}: \sqrt{6}$

(3 puntos) 12. Si $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, $\mathbf{u} = \langle -2, 3/4, 1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle k, 8, -4\rangle$, entonces k es igual a:

$\mathbf{a}: 0$ $\mathbf{b}: 1$ $\mathbf{c}: 1/2$

$\mathbf{d}: -1/2$ $\mathbf{e}: -2$ $\mathbf{f}: 4$

(3 puntos) 13. El vector $\overrightarrow{PQ}$ que representa el vector con punto inicial $P(3,-2,1)$ y que termina en $Q(-5,2,1)$ es:

$\mathbf{a}: \langle 3,-2,1\rangle$ $\mathbf{b}: \langle -5,2,1\rangle$ $\mathbf{c}: \langle -15,-4,1\rangle$

$\mathbf{d}: \langle 8,-4,0\rangle$ $\mathbf{e}: \langle -8,4,0\rangle$ $\mathbf{f}: \langle 2,0,2\rangle$

(3 puntos) 14. El dominio de $\dfrac{\ln(x+y-1)}{x-1}$ es:

$\mathbf{a}: \{(x,y)\colon y > 1-x \ \&\ x \neq 1\}$ $\mathbf{b}: \{(x,y)\colon x \neq 1\}$ $\mathbf{c}: \{(x,y)\colon -\infty < x, y < \infty\}$

$\mathbf{d}: \{(x,y)\colon x, y \geqslant 0\}$ $\mathbf{e}: \{(x,y)\colon y > 1-x\}$ $\mathbf{f}: \{(x,y)\colon y > e^{1-x}\}$

(3 puntos) 15. Si cambiamos el punto $(-1, \sqrt{3}, 7)$ de coordenadas rectángulares a coordenadas cilíndricas obtenemos:

$\mathbf{a}: (-2, 2\pi/3, 7)$ $\mathbf{b}: (2, 2\pi/3, 7)$ $\mathbf{c}: (\sqrt{3}-1, \pi/3, 7)$

$\mathbf{d}: (-2, \pi/6, 7)$ $\mathbf{e}: (2, 5\pi/6, 7)$ $\mathbf{f}: (\sqrt{3}-1, \pi/3, 7)$

(24 puntos) II. Evalue las siguientes integrales:

16 a. $\displaystyle\int \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\, dx$

16 b. $\displaystyle\int 2xe^x\, dx$

16 c. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(2x)\operatorname{sen}(4x)\, dx$

16 d. $\displaystyle\int \frac{2}{x^2 - x}\, dx$

(8 puntos) 17. Halle una representación en series de potencias de $f(x) = \ln(1 - 2x)$ y determine su radio de convergencia.

(8 puntos) 18. Halle una ecuación del plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto $P(1, 6, -4)$ y contiene la recta dada por ecuaciones paramétricas

x=1+2t, y=2-3t, z=3-t .

(8 puntos) 19. Halle un vector unitario que sea perpendicular a los vectores $\mathbf{u} = \langle 1/2, 2, 3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 1, 0, -3/4 \rangle$.

(8 puntos) 20. Dibuje un esquema de la gráfica de la superficie cuádrica dada por la ecuación

$$2x^2 - 8y^2 = 8 + 4z^2$$