Solución del Examen I de MATE 3173
16 de septiembre de 2008

Parte A (con calculadora)

1. Utiliza una calculadora gráfica para completar la tabla siguiente.

x	$\sqrt{x^2+99x}$
0	0
1	10
33	66
48	84
176	220
225	270
768	816

Determina la razón de cambio de $\sqrt{x^2+99x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

10

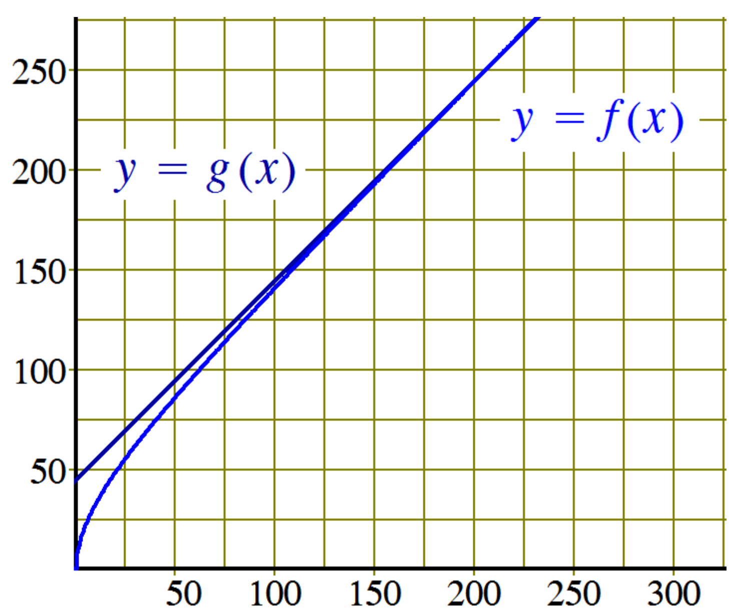
Determina la razón de cambio de $\sqrt{x^2+99x}$ desde $x = 1$ hasta $x = 33$.

$$\frac{66-10}{33-1} = \frac{56}{32} = \frac{7}{4} = 1.75$$

Explica por qué $f(x) = \sqrt{x^2+99x}$ no puede ser una función lineal.

Porque la razón de cambio no es constante.

Dibujan las gráficas de $f(x) = \sqrt{x^2+99x}$ y de $g(x) = x + 44.5$ en el sistema de coordenadas a continuación de acuerdo a la escala incluida.



¿Cómo comparan las dos gráficas anteriores?

Para $x < 200$, las dos gráficas parecen casi la misma.

2. Hay rumores que el Departamento de Educación utilizará cantantes para promover su nuevo currículo de ciencias. Se han creado dos tipos de termómetro nuevos cuyas escalas llevarán los nombres de Victor Manuelle y Kany Garcia. Un tipo de termómetro con una escala °V (grados Victor) y otro con una escala °K (grados Kany). Se sabe que 40°V = 25°K y 280°V = 125°K. Si la relación entre grados Victor y grados Kany es lineal, escribe la temperatura en grados °V en términos de la temperatura en grados °K.

$$\text{pendiente} = \frac{280-40}{125-25} = \frac{240}{100} = 2.4$$

$$V = 2.4(K - 25) + 40 \text{ ó } V = 2.4K - 20$$

3. La energía cinética ec de un objeto es proporcional al cuadrado de la velocidad v del objeto. Si la energía cinética de una bola es 120 julios cuando tiene una velocidad de 50 mph, ¿cuánto sería la energía cinética de la misma bola cuando tiene una velocidad de 100 mph?

Si $\dfrac{ec}{v^2}$ es constante, entonces

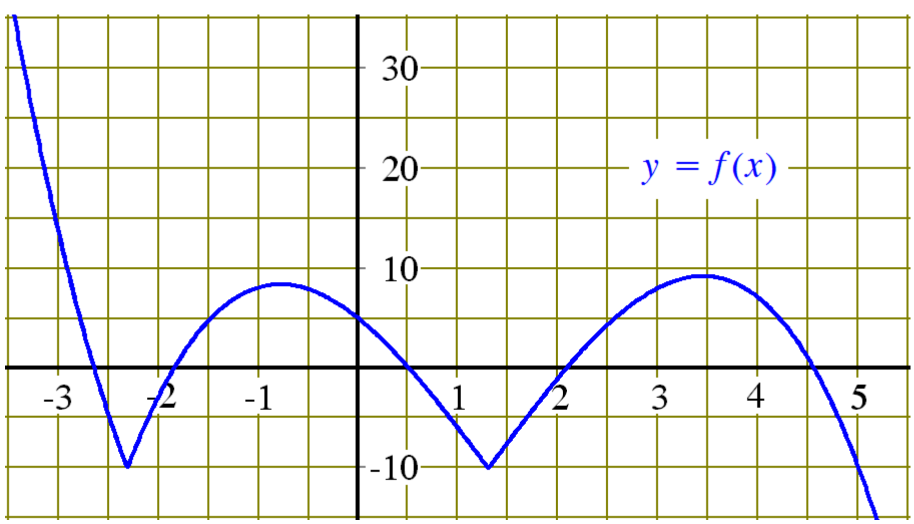
$$\frac{ec}{(100\text{ mph})^2} = \frac{120\text{ julios}}{(50\text{ mph})^2} \quad \Rightarrow \quad ec = \frac{120\text{ julios}}{(50\text{ mph})^2}(100\text{ mph})^2 = 480\text{ julios}$$

¿A qué velocidad hay que tirar la bola para alcanzar una energía cinética de 600 julios?

$$\frac{600\text{ julios}}{v^2} = \frac{120\text{ julios}}{(50\text{ mph})^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{600\text{ julios}}{120\text{ julios}}(50\text{ mph})^2 = v^2$$

$$v = 50\sqrt{5}\text{ mph} \approx 111.8034\text{ mph}$$

4. Utiliza su calculadora gráfica para buscar la raíz (intercepto en x) más grande de la función $f(x) = (5-x)\left|3-x-x^2\right| - 10$ en el intervalo [-3,5]. (La raíz debe ser correcta hasta 6 lugares decimales.



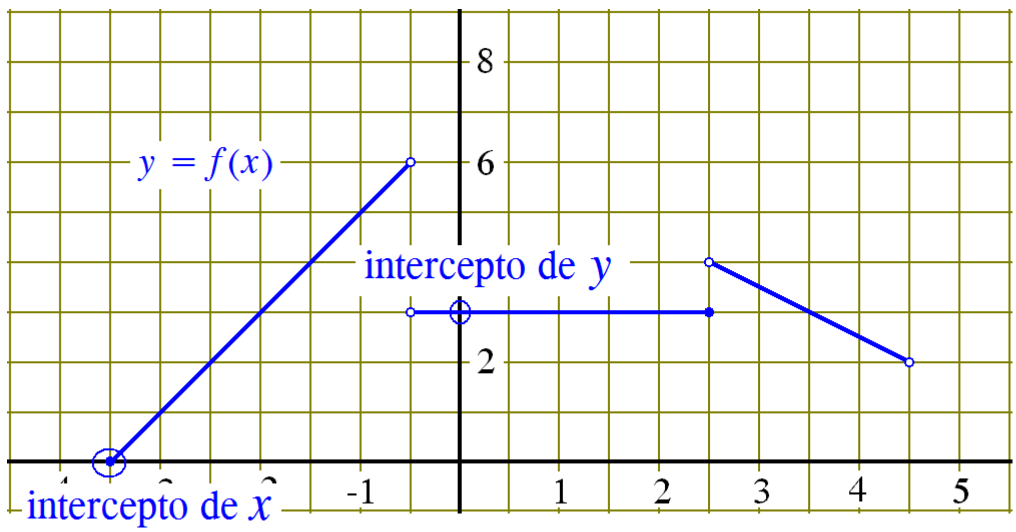
raíz ≈ 4.550769

Buscar el valor máximo alcanzado por la función $f(x) = (5-x)|3-x-x^2|-10$ en el intervalo $[-2,5]$. El máximo debe ser correcto hasta 6 lugares decimales.)

máximo ≈ 9.146831

Parte B (sin calculadora)

5. La gráfica siguiente define la función f.



a) Escribe el dominio de la función f en notación de intervalo.

$[-4,-0.5) \cup (-0.5,4.5)$

b) Escribe el campo de valores (*range*) de la función f en notación de intervalo.

$[0,6)$

c) Rotulan los interceptos de x y de y en la gráfica y anotan los valores correspondientes aquí.

intercepto de $x \approx -3.5$ y intercepto de $y \approx 3$

d) Determina la razón de cambio de la función f en el intervalo $[-3,-1]$.

$$\frac{1-5}{-3-(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

6. Determina el dominio y el campo de valores (*range*) de la función $f(x) = \sqrt{x+4} - 3$.

dominio: $[4,\infty)$ ó $\{x \mid x \geq 4\}$ o equivalente campo de valores: $[-3,\infty)$ ó $\{y \mid y \geq -3\}$ o equivalente

7. Sea $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

   Evalúe y simplifique $f(a+h)$

   $f(a+h) = (a+h)^2 - 2(a+h) + 3$

   $f(a+h) = a^2 + 2ah + h^2 - 2a - 2h + 3$

   Evalúe y simplifique $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

   $$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\left(a^2 + 2ah + h^2 - 2a - 2h + 3\right) - \left(a^2 - 2a + 3\right)}{h}$$

   $$= \frac{2ah + h^2 - 2h}{h}$$

   $$= 2a + h - 2$$

8. Si p es inversamente proporcional a q y $q = 20$ cuando $p = 4$, ¿cuánto es q cuando $p = 5$?

   p es inversamente proporcional a q quiere decir $p \times q$ es constante

   Si $q = 20$ cuando $p = 4$, entonces $p \times q = 4 \times 20 = 80$

   Cuando $p = 5$, entonces $5 \times q = 80$ y $q = 16$

9. Se vacía una piscina a razón constante de 50 galones por minuto. Luego de dos horas hay $30{,}500$ galones en la piscina.

   a) Exprese el volumen V de agua en la piscina (en galones) como función del tiempo t (en minutos) desde que comenzó a vaciarse.

      $V = -50(t - 120) + 30{,}500$ ó $V = -50t + 36{,}500$

   b) ¿Cuántos galones tenía la piscina al principio?

      En $t = 0$, $V = -50(-120) + 30{,}500 = 36{,}500$ galones

   c) ¿Cuántas horas y minutos más tardará en vaciar la piscina?

      $0 = -50(-120) + 30{,}500$ en $t = 730$ minutos y como ya han pasado 120 minutos, faltan 610 minutos más ó

$$\frac{30{,}500 \text{ galones}}{50 \text{ galones / minuto}} = 610 \text{ minutos}$$

610 minutos son 10 horas y 10 minutos

10. Completa la tabla siguiente para $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 4-x & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$.

x	-4	-2	0	2	4	6
$f(x)$	-1	1	3	5	0	-2

Halle valores para h y k tal que $|x-h|+k = f(x)$ o explica por qué no se puede.

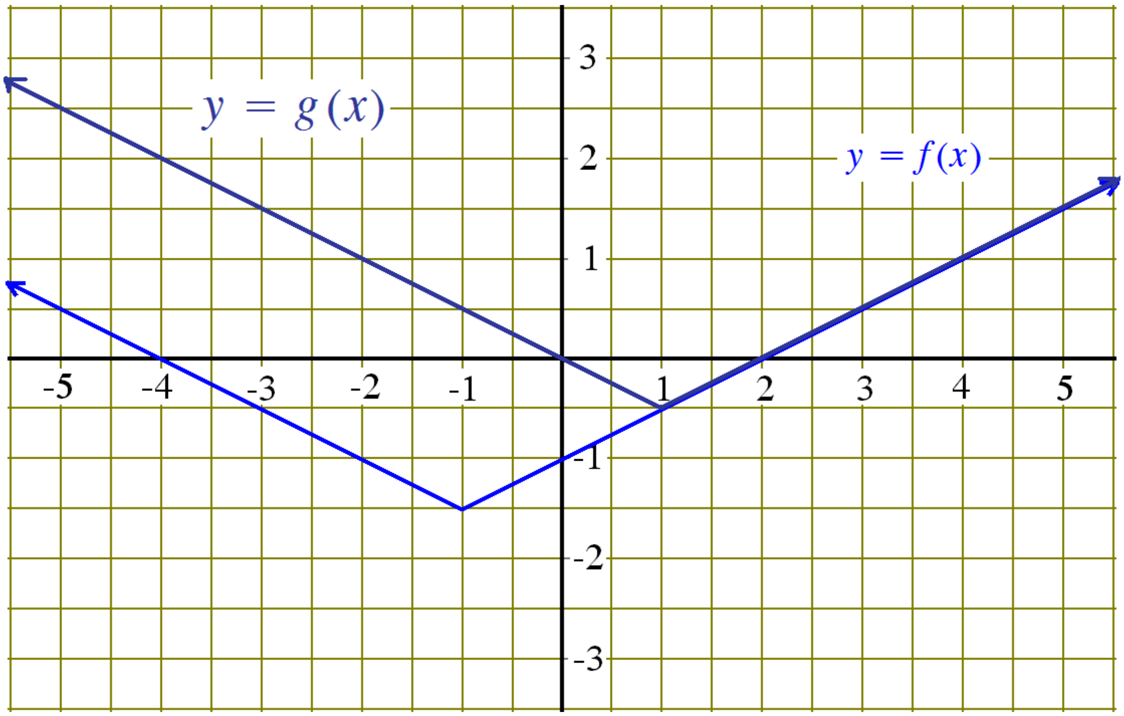
Si $f(x) = |x-h|+k = \begin{cases} (x-h)+k \text{ si } x-h>0 \Leftrightarrow x>h \\ -(x-h)+k \text{ si } x-h \le 0 \Leftrightarrow x \le h \end{cases}$,

entonces la pendiente de f por la derecha de h (que tiene que ser 2 porque es donde cambia la regla) tendría que ser 1, pero es -1. Así <u>no se puede</u>.

11. Sea $g(x) = f(x-2)+1$. Describe claramente como transformar la gráfica de $f(x)$ a la gráfica de $g(x)$.

La gráfica de g es como la de f pero desplazado 2 hacia la derecha y 1 hacia arriba.

Utiliza su explicación anterior y la gráfica de $f(x)$ a continuación para dibujar la gráfica de $g(x) = f(x-2)+1$.



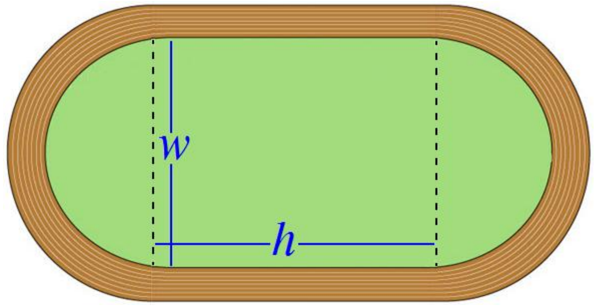
12. Sea $f(x) = 1 - 2x$ y $g(x) = x^2 - x$. Halle una fórmula para cada una de las siguientes funciones y simplifique.

$(f - g)(x) = (1 - 2x) - (x^2 - x) = 1 - x - x^2$

$(gf)(x) = (x^2 - x)(1 - 2x) = 3x^2 - 2x^3 - x$

$\dfrac{g}{f}(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 - 2x}$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= (f(x))^2 - (f(x)) \\ &= (1 - 2x)^2 - (1 - 2x) \\ &= 1 - 4x + 4x^2 - 1 + 2x \\ &= 4x^2 - 2x\end{aligned}$$



Bono: Un área para pista y campo se va a construir en forma de un rectángulo con semicírculos en cada extremo. El perímetro del interior de la pista tiene que medir 400 metros. Halle las dimensiones del rectángulo que maximiza el área del rectángulo dentro de la pista.

Sea w el ancho del rectángulo, h el largo y A el área.

Así el área mayor de $\dfrac{20000}{\pi}$ metros cuadrados resulta cuando el ancho es $\dfrac{200}{\pi}$ metros y el largo es 100 metros.