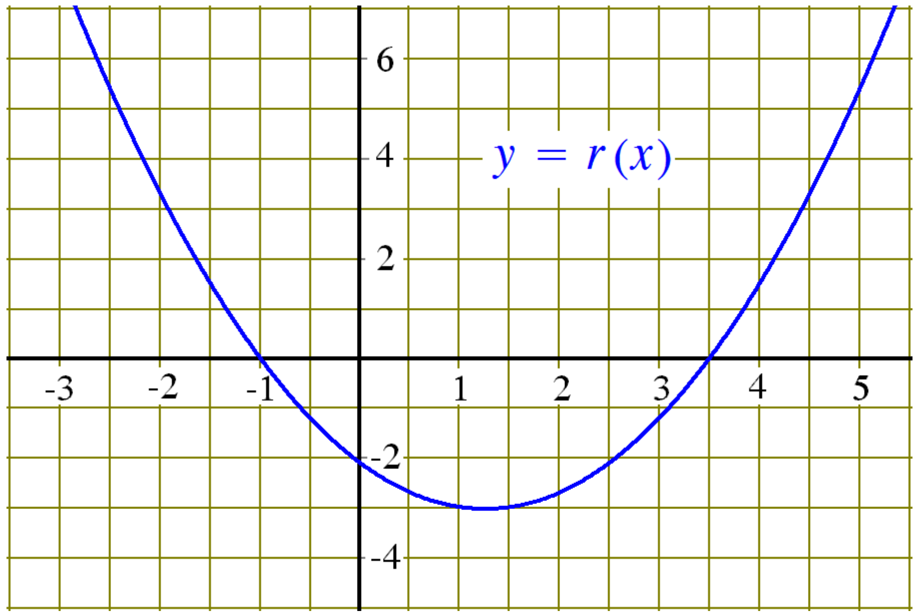
Solución del Examen II de MATE 3173
15 de octubre de 2008

Parte A (con calculadora)

Escriba claro y muestre todo su trabajo.



1. La gráfica anterior representa la función cuadrática $r(x)$. Escribe una fórmula para $r(x)$.

   vértice (1.25, -3)

   $$0 = a(-1-1.25)^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{2.25^2} = \frac{16}{27} \approx 0.59\overline{259}$$

   $$r(x) = \frac{16(x-1.25)^2}{27} - 3 \quad \text{ó}$$

   $$r(x) = \frac{16x^2 - 40x - 56}{27} \quad \text{ó}$$

   $$r(x) = 0.59\overline{259}x^2 - 1.48\overline{148}x - 2.\overline{074}$$

2. La siguiente tabla ilustra algunos valores de la función exponencial $f(x)$.

x	-3		2	5
$f(x)$	62.5	2	0.64	

   a. Si $f(x)$ tiene la forma ab^x, encuentra una fórmula para $f(x)$.

   $$b^5 = \frac{ab^2}{ab^{-3}} = \frac{0.64}{62.5} = 0.01024 \quad \Rightarrow \quad b = 0.4$$

$$a(0.16) = 0.64 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

$$f(x) = 4(0.4)^x$$

b. Halle $f(5)$. (Respuesta precisa hasta el millonésimo - 6 lugares decimales.)

$$f(x) = 4(0.4)^5 = 0.040960$$

c. Halle todos los valores de x tal que $f(x) = 2$. (Precisa hasta el millonésimo.)

$f(x) = 4(0.4)^x = 2$ cuando $x \approx 0.756471$

3. La siguiente tabla ilustra algunos valores de la función lineal $g(x)$.

x	1	4	7	10
$g(x)$	3	8	13	18

a. Halle una fórmula para $g(x)$.

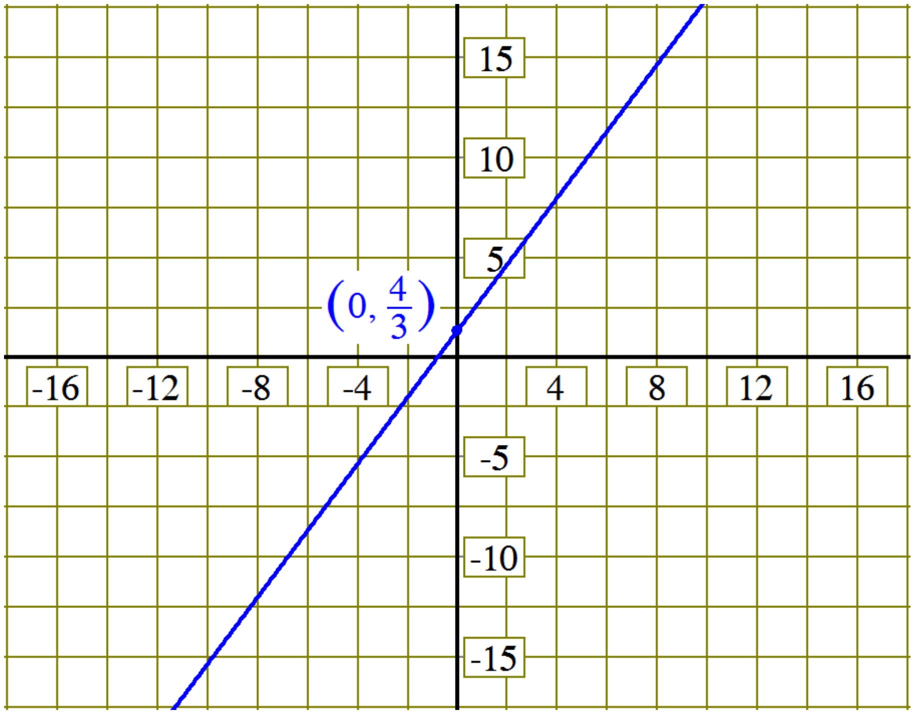
$$m = \frac{13-8}{7-4} = \frac{5}{3} = 1.66\overline{6}$$

$$g(x) = \frac{5}{3}(x-4) + 8 \quad \text{ó} \quad g(x) = \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$$

b. Completa la tabla. (Respuesta precisa hasta el millonésimo - 6 lugares decimales.)

$g(1) = 3$ y $g(10) = 18$

c. Dibuja la gráfica de la función $g(x)$ a continuación (incluye la escala utilizada y el valor del intercepto.)



4. Un certificado de depósito de $\$5000$ en el Banco Volaré gana 1% de intereses cada tres meses. Escribe una función exponencial que representa el valor del CD a los t años después del depósito inicial.

   $V(t) = 5000(1 + 0.01)^{4t}$

   ó $V(t) = 5000(1.04060401)^{t}$

   Utiliza la función anterior para completar la tabla siguiente.

años	0	1	2	5	10
valor	\$5000.00	\$5203.02	\$5414.28	\$6100.95	\$7444.32

   Determina la tasa de interés anual simple (APY) que representa la tasa de interés anterior.

   4.060401%

5. Describe cómo obtener la gráfica de $f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ desde la gráfica de $f(x)$ (transformar).

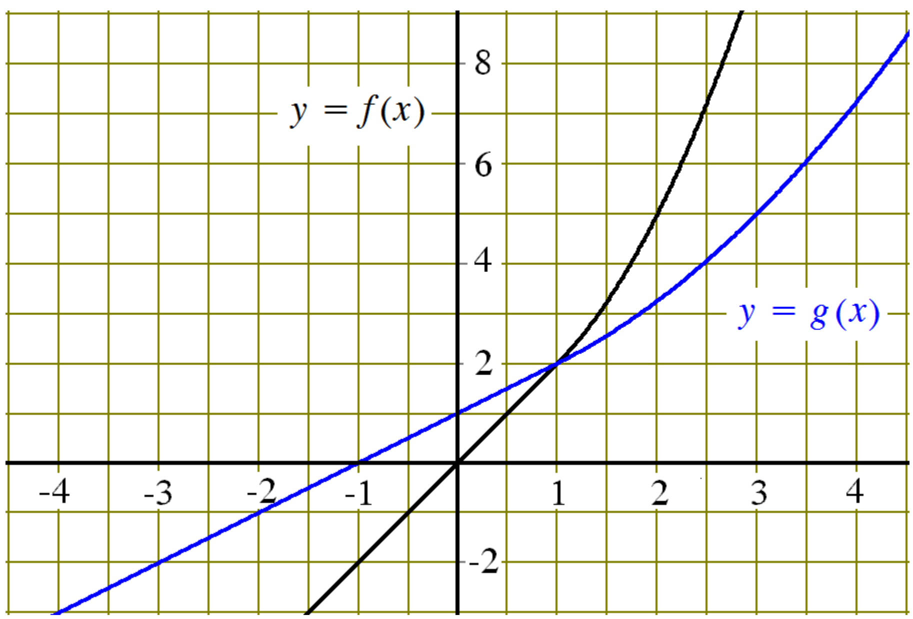
Estirar la gráfica de $f(x)$ al doble horizontalmente y desplazar eso 1 a la izquierda.

(Equivalente: Desplazar la gráfica de $f(x)$ a la izquierda $1/2$ unidad y estirar al doble.)

Sea $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x \le 1 \\ x^2+1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$ y $g(x)=f\left(\frac{x+1}{2}\right)$. Halle una fórmula para $g(x)$.

$$g(x)=\begin{cases} \underline{x+1} & \text{si } \underline{x \le 1} \\ \underline{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} & \text{si } \underline{1 < x} \end{cases}$$

La gráfica a continuación representa la función $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x \le 1 \\ x^2+1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$. Dibuja la gráfica de $g(x)$ a base de su fórmula anterior, en el mismo sistema de coordenadas.



Parte B (sin calculadora)

Escriba claro y muestre todo su trabajo.

6. Exprese la función $f(x) = 3 + 10x - 2x^2$ en la forma $a(x-\mathrm{h})^2 + \mathrm{k}$.

$f(x) = -2(x^2 - 5x \quad\quad) + 3$

$f(x) = -2(x^2 - 5x \underline{+ 2.5^2}) + 3 \underline{+ 2(2.5)^2}$

$f(x) = -2(x - \underline{2.5}))^2 + \underline{15.5}$

a. Halle el intercepto al eje de y de la gráfica de la función f.

$y = 3$ ó $(0,3)$

b. Halle el valor máximo de la función f en el intervalo $[-2,6]$.

El valor máximo es $f(2.5) = 15.5$

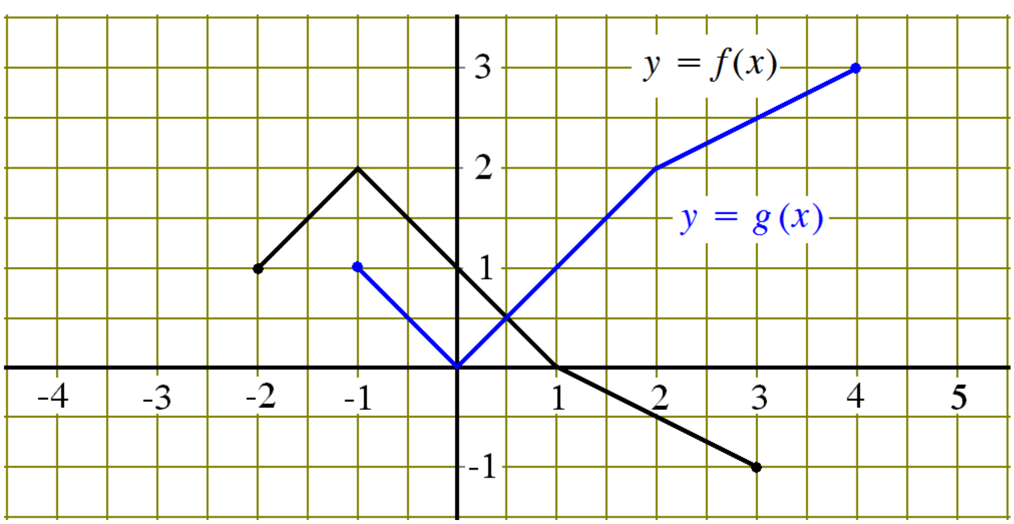
c. Halle el valor mínimo de la función f en el intervalo $[-2,6]$.

El valor mínimo es $f(-2) = -25$

7. Sea $g(x) = -f(x-1) + 2$. Describe claramente como transformar la gráfica de $f(x)$ a la gráfica de $g(x)$.

Desplazar la gráfica de $f(x)$ una unidad a la derecha, reflejar por el eje de x y luego desplazar dos unidades hacia arriba.
Alternativa: Desplazar la gráfica de $f(x)$ dos unidades hacia abajo, una unidad a la derecha y luego reflejar por el eje de x.

Utiliza su explicación anterior y la gráfica de $f(x)$ a continuación para dibujar la gráfica de $g(x) = -f(x-1) + 2$.



x	0	1	2	3	4
$4.8(1.5)^x$	4.80	7.20	10.80	16.20	24.30

8. Dado la tabla anterior, determina la fórmula de la función g en la tabla siguiente.

x	2	4	6	8	10
$g(x)$	4.80	7.20	10.80	16.20	24.30

Si se desplaza la función $4.8(1.5)^x$ dos unidades a la derecha y se estira al doble horizontalmente, resulta la función $g(x)$. Así $g(x) = 4.8(1.5)^{\frac{x-2}{2}}$.

Alternativa: Si $g(x) = a(b)^x$, entonces $b^2 = \dfrac{a(b)^4}{a(b)^2} = \dfrac{g(4)}{g(2)} = \dfrac{7.2}{4.8} = 1.5$.

Así $b = \sqrt{1.5}$

Si $b = \sqrt{1.5}$, entonces $4.8 = a\left(\sqrt{1.5}\right)^2 = 1.5a \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{4.8}{1.5} = 3.2$.

Así $g(x) = 3.2\left(\sqrt{1.5}\right)^x$

9. Determina el dominio y el campo de valores (*range*) de la función $g(x) = 2\sqrt{x-4} + 3$.

Dominio: $[4,\infty)$

Campo de valores: $[3,\infty)$

10. Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2f(x-1) + 3$.

Evalúe y simplifique $g(a+h)$

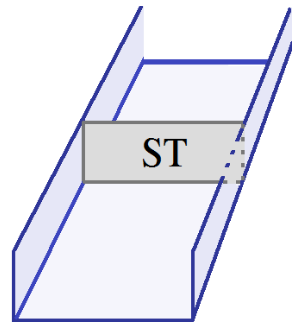
$g(a+h) = 2(a+h-1)^2 + 3 = 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 4a - 4h + 5$

Evalúe y simplifique $\dfrac{g(a+h) - g(a)}{h}$.

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \frac{\left[2a^2 + 4ah + 2h^2 - 4a - 4h + 5\right] - \left[2a^2 - 4a + 5\right]}{h}$$

$$= \frac{4ah + 2h^2 - 4h}{h} = 4a + 2h - 4$$

11. Una plancha rectangular de zinc mide 16 pulgadas de ancho. Si se doblan los lados en forma perpendicular a la base para formar una canal para desagüe, escribe el área de una sección transversal (ST) del desagüe como función de lo que se dobla hacia arriba de la plancha.



Sea x la medida de lo que se dobla hacia arriba.

El área A de una sección transversal es $x(16 - 2x)$.

$A = 16x - 2x^2$

Bono: La tabla siguiente muestra algunos valores de la función $f(x) = x^2 + 2^x$.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	8	17	32

La tabla siguiente muestra algunos valores de una transformación de la función $f(x)$.

x	3	7	11	15	19
$g(x)$	15	35	85	175	325

Halle la fórmula de $g(x)$.

$$g(x) = 10\left(\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 2^{\frac{x-3}{4}}\right) + 5$$