Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez

Departamento de Ciencias Matemáticas

V Competencia de Precálculo

19 de noviembre de 2015

Identificacion:______________

1 Resolver la siguiente ecuación $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{x}{2}}-8}=-1$

2 Un rectángulo uno de cuyos lado mide x pies está inscrito en un círculo de radio 12 pies. Exprese el área del rectángulo como una función de x.

3 La función f satisface las propiedades $f(1)=1$ y $f(n)=n+f(n-1)$ para todos los enteros $n\geq 2$, halle $f(2015)$.

4 Halle todas las soluciones del sistema de ecuaciones. $\begin{array}{c} x^2+2xy+y^2=9 \\ x^2+2xy-y^2=-9 \end{array}$

5 Si una de las raíces de la ecuación $2x^3-5x^2-8x+d=0$ es la negativa de la otra, halle el valor de d.

6 Dada la función $f(x)=\sqrt{5-x}\,(|x-5|+1+x)$, halle $f^{-1}(x)$, indique dominios de f y f^{-1}

7 Dada la función polinómica $f(x)=1+bx^3-ax^5-2x^7$, donde a es un número entero positivo y b es un número entero negativo, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a. Una raíz de $f(x)=0$ es $\dfrac{1}{3}$

b. Si $x_1<x_2$ entonces $f(x_1)<f(x_2)$

c. $f(x)=0$ tiene una sola raíz real

8 Resolver para x: $2\sin(4x)-1=0$, en el intervalo $[0,2\pi]$.

9 Sea A una matriz definida por $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ y $B=A+A^3+A^5+\cdots+A^{19}-A^{20}$, halle el determinante de B.

10 La suma de los logarítmos de base 10 de los primeros cinco términos de una sucesión geométrica es $8\frac{1}{3}$ y la suma de los logarítmos de base 10 de los próximos 4 números de la sucesión geométrica es $3\frac{2}{3}$. Si el cuarto número de la sucesión geométrica es $\sqrt{S}$, halle el valor de S

Universidad de Puerto Rico

Recinto Universitario de Mayagüez

Departamento de Ciencias Matemáticas

V Competencia de Precálculo

19 de noviembre de 2015

Identificacion:_____________

1 Resolver la siguiente ecuación $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{x}{2}}-8}=-1$

Elevando a la tercera potencia, se obtiene:

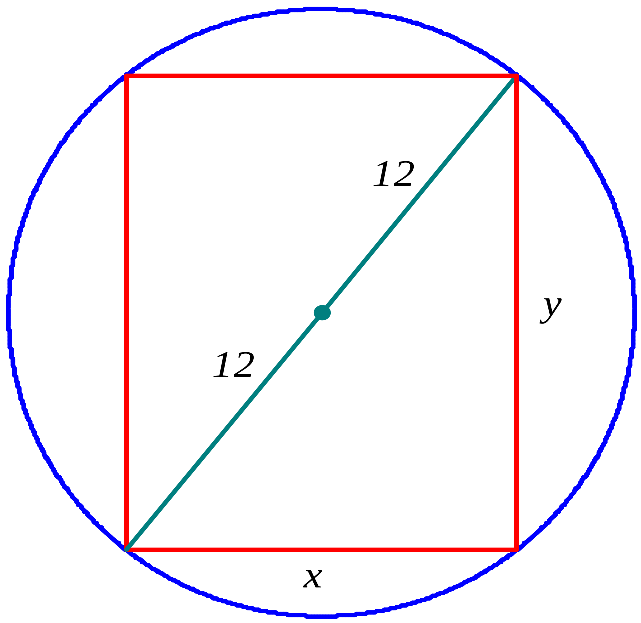
$\left(\sqrt[3]{\sqrt{\frac{x}{2}}-8}\right)^3=(-1)^3 \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{2}}-8=-1 \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{2}}=7$

Elevando al cuadrado:

$\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2=7^2 \Rightarrow \dfrac{x}{2}=49 \Rightarrow x=98$

Verificación: $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{49}{2}}-8}=\sqrt[3]{7-8}=-1$

2 Un rectángulo uno de cuyos lado mide x pies está inscrito en un círculo de radio 12 pies. Exprese el área del rectángulo como una función de x.



Sean x y y los lados del rectángulo inscrito en el círculo de radio 12, el área del rectángulo es dada por:

$A=xy,$ la cual depende de dos variables

Usando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$x^2+y^2=24^2$$

Como el área se debe expresar en términos de $x,$ se despeja para y :

$y=\pm\sqrt{576-x^2}$

y debe ser positivo, por lo tanto:

$A=x\sqrt{576-x^2}$

3 La función f satisface las propiedades $f(1)=1$ y $f(n)=n+f(n-1)$ para todos los enteros $n\geq 2,$ halle $f(2015)$.

Reescribiendo la fórmula se obtiene: $f(n)-f(n-1)=n.$ Observe el siguiente patrón:

$$\begin{aligned} f(2015)-f(2014)&=2015\\ f(2014)-f(2013)&=2014\\ f(2013)-f(2012)&=2013\\ f(2012)-f(2011)&=2012\\ &\vdots\\ f(3)-f(2)&=3\\ f(2)-f(1)&=2 \end{aligned}$$

Sumando todas las ecuaciones se obtiene:

$f(2015)-f(1)=2015+2014+2013+\cdots+3+2$

despejando para:

$$\begin{aligned} f(2015)&=2015+2014+2013+\cdots+3+2+1\\ &=\frac{2015(2016)}{2}=2015(1008)=2,031,120 \end{aligned}$$

4 Halle todas las soluciones del sistema de ecuaciones. $\begin{array}{c} x^2+2xy+y^2=9 \\ x^2+2xy-y^2=-9 \end{array}$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$2x^2+4xy=0 \Rightarrow 2x\,(x+2y)=0 \Rightarrow x=0$ y $x+2y=0$

Si $x=0 \Rightarrow y^2=9 \Rightarrow y=\pm 3$, las soluciones son $(0,-3)$ y $(0,-3)$.

De $x+2y=0 \Rightarrow x=-2y$ sustituyendo en la primera ecuación se obtiene:

$4y^2-4y^2+y^2=9 \Rightarrow y^2=9 \Rightarrow y=\pm 3$

Si $y=3 \Rightarrow x=-6$ y si $y=-3 \Rightarrow x=6$

Las soluciones son: $(0,-3)$, $(0,-3),(6,-3)$ y $(-6,3)$

5. Si una de las raíces de la ecuación $2x^3-5x^2-8x+d=0$ es la negativa de la otra, halle el valor de d

Sean r y $-r$ las dos raíces. Sustituyendo en la ecuación se obtiee:

$$\begin{array}{ll} 2r^3-5r^2-8r+d=0 & (1) \\ -2r^3-5r^2+8r+d=0 & (2) \end{array}$$

Sumando (1) y (2, se obtiene: $-10r^2+2d=0 \Rightarrow d=5r^2$

Restando (2) de (1), se obtiene: $4r^3-16r=0 \Rightarrow 4r\left(r^2-4\right)=0 \Rightarrow r=0, \quad r=\pm 2$

Por lo tanto: $d=5\,(2)^2=20$

6 Dada la función $f\,(x)=\sqrt{5-x}\,(|x-5|+1+x)$, halle $f^{-1}\,(x)$, indique dominios de f y f^{-1}

$Dom\,(f)=\{x\in\mathbb{R}|5-x\geq 0\}=(-\infty,5]$ y $rango(f)=[0,\infty)$

$$|x-5|=\left\{\begin{array}{ll} -(x-5) & \text{si } x-5<0 \\ x-5 & \text{si } x-5\geq 0 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} -x+5 & \text{si } x<5 \\ x-5 & \text{si } x\geq 5 \end{array}\right.$$

Entonces, como $x\leq 5$: $|x-5|+1+x=-x+5+1+x=6$ y la función se puede escribir:

$f\,(x)=6\sqrt{5-x}$ la cual es 1-1 y su inversa es:

$y=6\sqrt{5-x}$ elevando al cuadrado:

$y^2=\left(6\sqrt{5-x}\right)^2 \Rightarrow y^2=36\,(5-x)$ despejando x :

$5-x=\dfrac{y^2}{36} \Rightarrow x=5-\dfrac{y^2}{36}$ y la función inversa es:

$f^{-1}\,(x)=5-\dfrac{x^2}{36}$; $Dom\left(f^{-1}\right)=rango(f)=[0,\infty)$

7 Dada la función polinómica $f(x) = 1 + bx^3 - ax^5 - 2x^7$, donde a es un número entero positivo y b es un número entero negativo, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, **justificando su respuesta**:

a. Una raíz de $f(x) = 0$ es $\frac{1}{3}$

Falso, porque los divisores de 1 son ± 1 y los divisores del coeficiente principal son $\pm 1, \pm 2$,

por lo tanto los posibles ceros racionales son: $\pm 1, \pm 1/2, \pm 2$

1. b Si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$

Falso, la justificación a continuación,

Considere $f(x) = -\left(2x^7 + ax^5 - bx^3 - 1\right)$, luego:
Si $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1^7 < 2x_2^7$;
$x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1^5 < ax_2^5$;
$x_1 < x_2 \Rightarrow -bx_1^3 < -bx_2^3$;
Sumando las expresiones de la derecha se obtiene:
$2x_1^7 + ax_1^5 - bx_1^3 < 2x_2^7 + ax_2^5 - bx_2^3$ sumando 1 a ambos lados se obtiene:
$2x_1^7 + ax_1^5 - bx_1^3 + 1 < 2x_2^7 + ax_2^5 - bx_2^3 + 1$
Multiplicando por -1 a ambos lados:

$$\underbrace{-\left(2x_1^7 + ax_1^5 - bx_1^3 + 1\right)}_{f(x_1)} > \underbrace{-\left(2x_2^7 + ax_2^5 - bx_2^3 + 1\right)}_{f(x_2)}$$

$x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$

2. c. $f(x) = 0$ tiene una sola raíz real

Verdadero, en la parte b, se probó que $f(x)$ es estrictamente decreciente y como $f(x)$ es de grado impar tiene al menos una raízz real, pero al ser estrictamente decreciente, la raíz real es única

8 Resolver para x: $2\sin(4x) - 1 = 0$, en el intervalo $[0, 2\pi]$.

La ecuación se puee escribir como:

$$2\sin(4x) = 1 \Rightarrow \sin(4x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{24} + \frac{2k\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{24} + \frac{2k\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Por lo tanto las raíces de la ecuación son:

$\left\{\frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{29\pi}{24}, \frac{37\pi}{24}, \frac{41\pi}{24}\right\}$

9 Sea A una matriz definida por $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = A + A^3 + A^5 + \cdots + A^{19} - A^{20}$, halle el determinante de B.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$A^4 = A^2 A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^5 = A^4 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

Se observa que $A^n = \begin{cases} I & \text{si } n \text{ es par} \\ A & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Por lo tanto:

$$B = A + A^3 + A^5 + \cdots + A^{19} - A^{20} = A\left(I + A^2 + A^4 + \cdots + A^{18}\right) - A^{20}$$
$$= A(10I) - I = 10A - I = 10 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det B = (-1)(-1) - 10(10) = -98$

10 La suma de los logarítmos de base 10 de los primeros cinco términos de una sucesión geométrica es $8\frac{1}{3}$ y la suma de los logarítmos de base 10 de los próximos 4 números de la sucesión geométrica es $3\frac{2}{3}$. Si el cuarto número de la sucesión geométrica es $\sqrt{S}$, halle el valor de S

Los primeros 9 términos de la sucesón geométrica son:

$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5, ar^6, ar^7, ar^8$

Sumando los logarítmos de los primeros cinco términos es:

$\log a + \log ar + \log ar^2 + \log ar^3 + \log ar^4 = 5\log a + 10\log r = 5(\log a + 2\log r) = 5\log ar^2$

Por lo tanto: $5\log ar^2 = 8\frac{1}{3} = \dfrac{25}{3} \Rightarrow \log ar^2 = \dfrac{5}{3}$

El log del tercer término es: $\dfrac{5}{3}$

Similarmente la suma de los log de los nueve términos es:

$\log a + \log ar + \log ar^2 + \log ar^3 + \log ar^4 + \log ar^5 + \log ar^6 + \log ar^7 + \log ar^8 =$

$$= 9\log a + 36\log r = 9(\log a + 4\log r) = 9\log ar^4 = 8\tfrac{1}{3} + 3\tfrac{2}{3} = 12$$
$$\Rightarrow \log ar^4 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

El log del quinto término es: $\dfrac{4}{3}$

Como los log de los números de una serie geométrica forman una sucesión aritmética, entonces el log del cuarto término es el promedio de los log del tercer término y del quinto término:

Por lo tanto: $\log ar^3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{3}{2}$

El cuarto término es: $ar^3 = 10^{3/2} = \sqrt{1000} \Rightarrow k = 1000$