Universidad de Puerto Rico

Recinto Universitario de Mayagüez

Departamento de Ciencias Matemáticas

VI Competencia de Precálculo

18 de noviembre de 2016

Identificacion:_____________

1 Se reparten 3 dólares entre 4 personas de tal manera que a la primera le corresponde 40 centavos más que a la segunda, a ésta $\frac{3}{5}$ de lo que le corresponde a la tercera y a ésta 60 centavos más que a la cuarta. Halle la cantidad de dólares que recibió la tercera persona.

2 Dada la expresión $\frac{-9}{x^2-9} = \frac{A}{x+3} - \frac{B}{x-3}$ halle $A+B$

3 La función f tiene las propiedad $f(x) = 1 - f(x-1)$. Si $f(2) = 12$, halle $f(2016)$.

4 Halle todas las soluciones del sistema de ecuaciones. $\begin{aligned} e^x &= y^e \\ 4x &= e\left(4+\ln^2 y\right) \end{aligned}$

5 Un polinomio cuadrático f satisface. $f(x) \geq 0$ para todo x. Si $f(1) = 0$ y $f(3) = 3$, halle $f(5)$.

6 Halle todas las funciones lineales $f(x)$ tales que $(f \circ f)\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{9-4x}{x}, \quad \forall x \neq 0.$

7 Halle el determinante de la matriz $\begin{vmatrix} 5 & -5 & 2 & -3 \\ 7 & -4 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -9 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

8 Resolver para x: $\sin(3x) = \cos(7x)$ .para $0 < x < 360°$

9 Halle el valor de la constante k para que la recta $y = 2x + k$ sea tangente a la parábola $y = 6x^2 - x + 3$

10 Demuestre que si $a, b,$ y c son términos de una sucesión geométrica, entonce se cumple $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$

Universidad de Puerto Rico

Recinto Universitario de Mayagüez

Departamento de Ciencias Matemáticas

V Competencia de Precálculo

18 de noviembre de 2016

Identificacion:_______________

1 Se reparten 3 dólares entre 4 personas de tal manera que a la primera le corresponde 40 centavos más que a la segunda, a ésta $\frac{3}{5}$ de lo que le corresponde a la tercera y a ésta 60 centavos más que a la cuarta. Halle la cantidad de dólares que recibió la tercera persona.

Asuma que 3 dólares equivalen a 300 centavos.

Considere x la cantidad de centavos que recibe la segunda persona, por lo tanto se tiene:

primera persona	segunda persona	tercera persona	cuarta persona
$x+40$	x	$\frac{5}{3}x$	$\frac{5}{3}x-60$

Se obtiene la ecuación:

$x+40+x+\frac{5}{3}x+\frac{5}{3}x-60=300 \Rightarrow \frac{16}{3}x=320 \Rightarrow x=60$ centavos

Por lo tanto la tercera persona recibe: $\frac{5}{3}x=\frac{5}{3}(60)=100$ centavos o un dólar.

2 Dada la expresión $\frac{-9}{x^2-9}=\frac{A}{x+3}-\frac{B}{x-3}$ halle $A+B$

$$\frac{-9}{x^2-9}=\frac{A}{x+3}-\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)-B(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x(A-B)-3B-3A}{(x+3)(x-3)}$$

$$\Rightarrow -9=x(A-B)-3B-3A \Rightarrow \begin{array}{c}-3B-3A=-9\\ A-B=0\end{array} \Rightarrow A=B=\frac{3}{2}$$

3 La función f tiene las propiedad $f(x)=1-f(x-1)$. Si $f(2)=12$, halle $f(2016)$

Como $f(x)=1-f(x-1)$ se tiene que $f(x+1)=1-f(x)$

entonces sustituyendo $f(x)$ en $f(x+1)$, se obtiene:

$f(x+1)=1-(1-f(x-1))=f(x-1)$

Por lo tanto: $f(2)=f(4)=f(6)=\cdots=f(2016)=12$

4 Halle todas las soluciones del sistema de ecuaciones. $\begin{array}{c}e^x=y^e\\ 4x=e\left(4+\ln^2 y\right)\end{array}$

Aplicando $\ln$ a ambos lados de la primera ecuación:

$\ln e^x=\ln y^e \Rightarrow x=e\ln y$

luego reemplazando en la segunda ecuación:

$$4x=e\left(4+\frac{x^2}{e^2}\right)\Rightarrow 4x=4e+\frac{x^2}{e}\Rightarrow x^2-4ex+4e^2=(x-2e)^2=0\Rightarrow x=2e$$

Sustituyendo en $x=e\ln y$ se obtiene: $2e=e\ln y \Rightarrow \ln y=2 \Rightarrow y=e^2$

Por lo tanto la única solución es: $(x,y)=(2e,e^2)$

5. Un polinomio cuadrático f satisface. $f(x)\geq 0$ para todo x. Si $f(1)=0$ y $f(3)=3$, halle $f(5)$

Como $f(x)\geq 0$ para todo x y $f(1)=0$, el polinimio cuadr;atico debe ser de la forma:

$f(x)=a(x-1)^2$

Sustituyendo $x=3$ se tiene: $f(3)=a(3-1)^2=3\Rightarrow a=\frac{3}{4}$

Entonces $f(x)=\frac{3}{4}(x-1)^2$. Por lo tanto $f(5)=\frac{3}{4}(5-1)^2=12$

6 Halle todas las funciones lineales $f(x)$ tales que $(f\circ f)\left(\frac{1}{x}\right)=\dfrac{9-4x}{x}, \quad \forall x\neq 0$

Considere $f(x)=mx+b, \quad m\neq 0$, entonces:

$(f\circ f)(u)=f(f(u))=f(mu+b)=m(mu+b)+b=m^2u+b(m+1)$

Si $x\neq 0$ i tomando $u=\frac{1}{x}$ se obtiene:

$(f\circ f)\left(\frac{1}{x}\right)=m^2\dfrac{1}{x}+b(m+1)=\dfrac{9-4x}{x}=\dfrac{9}{x}-4$

$\Rightarrow m^2+b(m+1)x=9-4x$

Se obtienen dos ecuaciones:

$$\begin{array}{c} m^2=9 \\ b(m+1)=-4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{si } m=3\Rightarrow b=-1 \\ \text{si } m=-3\Rightarrow b=2 \end{array}$$

Por lo tanto, las funciones lineales son: $f(x)=3x-1$ y $f(x)=-3x+2$

7 Halle el determinante de la matriz $\begin{bmatrix} 5 & -5 & 2 & -3 \\ 7 & -4 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -9 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Si se realizan las operaciones de fila: $2R_3+R_1, \quad 3R_3+R_2, \quad 4R_3+R_4$ se obtiene la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ -9 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

cuyo determinante es el mismo que el de la matriz original, por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ -9 & 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -1(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ -9 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -36$$

8 Resolver para x: $\sin(3x)=\cos(7x)$ .para $0<x<360°$

Como $\sin(3x)=\cos(90-3x)$,

además $7x=90-3x\Rightarrow 10x=90$ o en forma general $10x=90+360n\Rightarrow x=9+36n, \quad n\in\mathbb{N}$

Como $0<x<360°$, entonces las soluciones se cumplen para $n=0,1,\cdots,9$ para un total de 10 soluciones.

También $\sin(3x)=\cos(270+3x)$,

además $7x=270+3x\Rightarrow 4x=270$ o en forma general $4x=270+360n\Rightarrow x=67.5+90n, \quad n\in\mathbb{N}$

Como $0<x<360°$, entonces las soluciones se cumplen para $n=0,1,2,3$ para un total de 4 soluciones.

Por lo tanto la ecuación posee 14 soluciones.

9 Halle el valor de la constante k para que la recta $y=2x+k$ sea tangente a la parábola $y=6x^2-x+3$

Sustituyendo la ecuación de la recta tangente en la ecuación de la parábola, se tiene:

$2x+k=6x^2-x+3\Rightarrow 6x^2-3x+3-k=0$

La condición de tangencia establece que el discriminante de la ecuación cuadrática es cero, entonces:

$9-4\times 6\times(3-k)=0\Rightarrow 9-72+24k=0\Rightarrow k=\dfrac{63}{24}=\dfrac{21}{8}$

10 Demuestre que si $a, b,$ y c son términos de una sucesión geométrica, entonce se cumple $(a+b+c)(a-b+c) = a^2+b^2+c^2$

Como $a, b,$ y c son parte de una sucesión geométrica, entonces:

$$\frac{b}{a} = r \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{b} = r \Rightarrow a = \frac{b}{r} \qquad \text{y} \qquad c = br$$

Luego: $(a+b+c)(a-b+c) = \left(\frac{b}{r}+b+br\right)\left(\frac{b}{r}-b+br\right)$

$$= b^2\left(\frac{1}{r}+1+r\right)\left(\frac{1}{r}-1+r\right) = b^2\left(\left(\frac{1}{r}+r\right)+1\right)\left(\left(\frac{1}{r}+r\right)-1\right)$$

$$= b^2\left(\left(\frac{1}{r}+r\right)^2-1\right) = b^2\left(\frac{1}{r^2}+r^2+1\right) = \frac{b^2}{r^2}+b^2+b^2r^2 = a^2+b^2+c^2$$