Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Departamento de Ciencias Matemáticas

VIII Competencia de Precálculo

14 de marzo de 2023

Identificacion:______________

1 Silvestre le dice a Olgamary: “yo tengo el triple de la edad que tu tenías cuando yo tenía la edad que tu tienes”. ¿Cuántos años tienen Silvestre y Olgamary, si sus edades suman 50 años?.

2 Determine el número entero menor x, tal que $\frac{x^2+5x-10}{x^2+2x-8} > 1$

3 El siguiente triángulo equilátero de lado 2 tiene uno de sus vértices en el centro del círculo, determine el área de la región sombreada

4 Halle el valor de a, tal que el sistema de ecuaciones tiene solución única.

$$\begin{aligned} y^2 + 1 &= -x \\ x^2 - 4 + a^2 + y^2 &= 2ax \end{aligned}$$

5 Sea f la función tal que $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2 & , \; 0\leq x<2 \\ 2x+1 & , \; 2\leq x<5 \end{cases}$

Si $1\leq x\leq 3/2$,halle$f\left(2x-1\right)-f\left(2x^2\right).$

6 Si i es la unidad imaginaria, simplificar: $P = \dfrac{(i-2i^{-1})^3(i-3i^{-1})^2}{(i+2i^{-1})^2\,(i+3i^{-1})^3}$

7 Dado que $|A|$, representa el determinante de la matriz A, resolver la ecuación
$$\begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & d+x \end{vmatrix} = 0$$

8 El dominio de la función $f(x) = \sqrt{\frac{3\pi}{2} - \cos^{-1}(x+2)}$ se puede escribir en la forma $[a, b]$, halle $a + b$

9 La base de un triángulo es 40 pies y uno de los ángulos de la base es 60 grados. La suma de la medida de los otros dos lados es 45 pies. ¿Cuánto mide el lado más corto del triángulo.

10 Halle el valor absoluto de la diferencia entre las raíces del polinomio $P(x) = c + bx - x^2$, $b, c \epsilon \mathbb{R}$. Si el máximo de $P(x)$ es 9.

Universidad de Puerto Rico

Recinto Universitario de Mayagüez

Departamento de Ciencias Matemáticas

VIII Competencia de Precálculo

14 de marzo de 2023

Solución

1 Silvestre le dice a Olgamary: “yo tengo el triple de la edad que tu tenías cuando yo tenía la edad que tu tienes”. ¿Cuántos años tienen Silvestre y Olgamary, si sus edades suman 50 años?.

	Pasado	Presente
Silvestre	y	$3x$
Olgamary	x	y

Aplicando la diferencia de edades :

$$Pasado: \; y - x = 3x - y \Rightarrow 2y = 4x \Rightarrow y = 2x \;\; (1)$$

Edades actuales suman 50 :

$$3x + y = 50 \; sustituyendo \; (1), \; se \; obtiene: \; 3x + 2x = 50 \Rightarrow x = 10$$

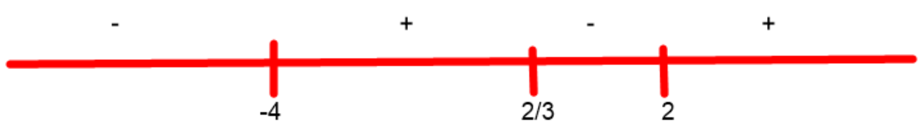
$$Silvestre \; tiene: \; 3x = 3(10) = 30 \text{ años}$$

$$Olgamary \; tiene: \; y = 2x = 2(10) = 20 \text{ años}$$

2 Determine el número entero menor x , tal que $\frac{x^2+5x-10}{x^2+2x-8} > 1$

$$\frac{x^2+5x-10}{x^2+2x-8} > 1 \Rightarrow \frac{x^2+5x-10}{x^2+2x-8} - 1 = \frac{x^2+5x-10-(x^2+2x-8)}{x^2+2x-8} = \frac{3x-2}{x^2+2x-8} > 0$$

$$Factorizando \; el \; denominador \; se \; tiene: \; \frac{3x-2}{x^2+2x-8} = \frac{3x-2}{(x+4)(x-2)} > 0$$



$$El \; conjunto \; solución \; es: \; (-4, 2/3) \bigcup (2/3, \infty)$$
$$El \; número \; entero \; menor \; que \; satisface \; la \; inecuación \; es \; -3$$

3 El siguiente triángulo equilátero de lado 2 tiene uno de sus vértices en el centro del círculo, determine el área de la región sombreada

Como el triángulo es equilátero con lado = 2

su altura es: $\sqrt{3}$

El área del triángulo es: $\frac{1}{2}(2)\sqrt{3} = \sqrt{3}$

El área del sector circular que contiene el triángulo es:

$$A_{sector} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{3})2^2 = \frac{2\pi}{3}$$

(puesto que el sector circular tiene un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ (el triángulo es equilátero)

y el radio del círculo es 2

Luego

$$A_{sombreada} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$$

4 Halle el valor de a, tal que el sistema de ecuaciones tiene solución única .

$$\begin{aligned} y^2+1&=-x \\ x^2-4+a^2+y^2&=2ax \end{aligned}$$

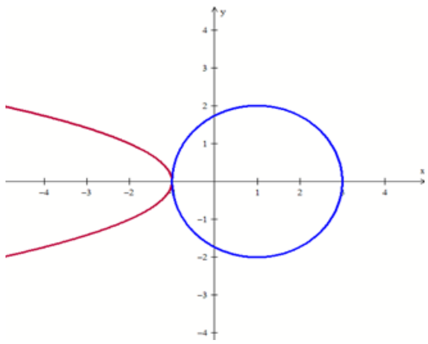
De la segunda ecuación se tiene : $x^2-2ax+a^2+y^2=4 \Longrightarrow (x-a)^2+y^2=4,$

ecuación de una circunferencia con centro $(a,0)$ *y radio* 4

De la primera ecuación se tiene $x=-1-y^2$, *la cual es una parábola con vértice* $(-1,0)$

La única alternativa para que la solución sea única es que las parábola y la circunferencia sean tangentes,

es decir, la distancia del centro de la circuneferencia y el vértice de la parábola debe ser $2 \Longrightarrow a=-1+2 \Longrightarrow a=1$



5 Sea f la función tal que $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \ 0\le x<2 \\ 2x+1 & , \ 2\le x<5 \end{cases}$

Si $1\le x\le 3/2$, halle $f(2x-1)-f(2x^2)$.

Para hallar $f(2x-1)$ *debemos acotar* $2x-1$ *de la condición* $1\le x<3/2 \Longrightarrow 2\le 2x<3$

restando 1 : $1\le 2x-1<2 \Longrightarrow f(2x-1)$ *se obtiene de la primera regla de correspondencia, es decir :*

$f(2x-1)=(2x-1)^2=4x^2-4x+1$

Similarmente para $f(2x^2)$ *debemos acotar* $2x^2$ *de la condición* $1\le x<3/2 \quad \Longrightarrow 1\le x^2<9/4 \Longrightarrow 2\le 2x^2<9/2$

$\Longrightarrow f(2x^2)$ *se otiene de la segunda regla de correspondencia, es decir :*

$f(2x^2)=2(2x^2)+1=4x^2+1$

Por lo tanto :

$f(2x-1)-f(2x^2)=4x^2-4x+1-(4x^2+1)=-4x$

6 Si i es la unidad imaginaria, simplificar: $P=\dfrac{(i-2i^{-1})^3(i-3i^{-1})^2}{(i+2i^{-1})^2\,(i+3i^{-1})^3}$

Asumiendo : $\dfrac{1}{i}=-i,-\dfrac{1}{i}=i$

$$P=\frac{(i-2i^{-1})^3(i-3i^{-1})^2}{(i+2i^{-1})^2(i+3i^{-1})^3}=\frac{(i-2\frac{1}{i})^3(i-3\frac{1}{i})^2}{(i+2\frac{1}{i})^2(i+3\frac{1}{i})^3}=\frac{(i+2i)^3(i+3i)^2}{(i-2i)^2(i-3i)^3}=\frac{(3i)^3(4i)^2}{(-i)^2(-2)^3}=\frac{(27i^3)(16i^2)}{(i^2)(-8i^3)}=-54$$

7 Dado que $|A|$, representa el determinante de la matriz A , resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & d+x \end{vmatrix} = 0$$

Restando a las tres primeras columna la cuarta columna, se obtiene :

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & c+x & x \\ x & x & x & d+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & x \\ 0 & b & 0 & x \\ 0 & 0 & c & x \\ -d & -d & -d & d+x \end{vmatrix} = 0$$

Considerando la primera columna para calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & x \\ 0 & b & 0 & x \\ 0 & 0 & c & x \\ -d & -d & -d & d+x \end{vmatrix} = a(-1)^2 \begin{vmatrix} b & 0 & x \\ 0 & c & x \\ -d & -d & d+x \end{vmatrix} - d(-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ b & 0 & x \\ 0 & c & x \end{vmatrix}$$

$$= a(b(-1)^2 \begin{vmatrix} c & x \\ -d & d+x \end{vmatrix} + (-d)(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & x \\ c & x \end{vmatrix}) + d(b)(-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & x \\ c & x \end{vmatrix}$$

$$= a[b(cd + cx + dx) - d(0 - cx)] - bd(0 - cx) = abcd + abcx + abdx + acdx + bcdx = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{abcd}{ab(c+d) + cd(a+b)}$$

8 El dominio de la función $f(x) = \sqrt{\frac{3\pi}{2} - \cos^{-1}(x+2)}$ se puede escribir en la forma $[a, b]$, halle $a + b$

Se debe satisfacer : $\frac{3\pi}{2} - cos^{-1}(x+2) \geq 0$, *como* $0 \leq cos^{-1}(x+2) \leq \pi$

Entonces solo debemos encontrar el intervalo para $0 \leq cos^{-1}(x+2) \leq \pi$

$$-1 \leq x + 2 \leq 1 \Rightarrow -3 \leq x \leq -1 \Rightarrow a + b = -4$$

9 La base de un triángulo es 40 pies y uno de los ángulos de la base es 60 grados. La suma de la medida de los otros dos lados es 45 pies. ¿Cuánto mide el lado más corto del triángulo.

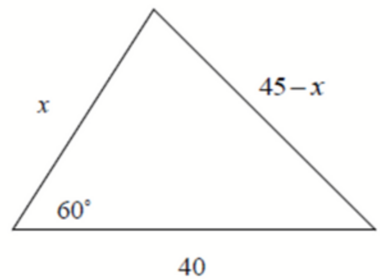
Aplicando ley de cosenos :

$$(45-x)^2 = x^2 + 40^2 - 2(40)x\cos 60^\circ$$

$$2025 - 90x + x^2 = x^2 + 1600 - 40x$$

$$50x = 425$$

$$x = 8.5$$



10 Halle el valor absoluto de la diferencia entre las raíces del polinomio $P(x) = c + bx - x^2$, $b, c \epsilon \mathbb{R}$. Si el máximo de $P(x)$ es 9.

Las raíces del polinomio $P(x) = 0$ son :

$$x_1 = \frac{b - \sqrt{b^2+4c}}{2}, x_2 = \frac{b + \sqrt{b^2+4c}}{2}$$

El valor absoluto de las raices es :

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{b - \sqrt{b^2+4c}}{2} - \frac{b + \sqrt{b^2+4c}}{2}\right| = \left|-\sqrt{b^2+4c}\right| = \sqrt{b^2+4c} \qquad (1)$$

El polinomio $P(x)$ se puede escribir como :

$$P(x) =- x^2 + bx + c =- (x^2 + bx + \frac{b^2}{4}) + c + \frac{b^2}{4} =- (x - \frac{b}{2})^2 + c + \frac{b^2}{4}$$

El valor de $P(x)$ será máximo cuando $x = \frac{b}{2} \Longrightarrow - (x - \frac{b}{2})^2 + c + \frac{b^2}{4} = 9$

$$\Longrightarrow c + \frac{b^2}{4} = 9 \Longrightarrow 4c + b^2 = 36 \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se obtiene : $|x_1 - x_2| = \sqrt{b^2+4c} = \sqrt{36} = 6$