SOLUCIONES
XXII Competencia de Cálculo

Departamento de Ciencias Matemáticas
Recinto Universitario de Mayagüez
Universidad de Puerto Rico

14 de marzo de 2023
Día de π

CÓDIGO DE ESTUDIANTE: ____________________
(Escribir el código solamente, no escriba su nombre.)

NO ESCRIBIR DEBAJO DE ESTA LINEA

Problema 1	
Problema 2	
Problema 3	
Problema 4	
Problema 5	
Problema 6	
Problema 7	
Problema 8	
Problema 9	
Problema 10	
TOTAL	

PROBLEMA 1

Evaluar este límite.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}4x\operatorname{sen}3x}{x\operatorname{sen}2x}\right)$$

Solución

Aplicamos la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}2u = 2\operatorname{sen}u\cos u$ para simplificar y luego aplicamos la regla de L'Ĥospital

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}4x\operatorname{sen}3x}{x\operatorname{sen}2x}\right)\\
=&\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\operatorname{sen}2x\cos 2x\operatorname{sen}3x}{x\operatorname{sen}2x}\right)\\
=&\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cos 2x\operatorname{sen}3x}{x}\right)\\
=&\left(\lim_{x\to 0}2\cos 2x\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{x}\right) \qquad \left(\frac{0}{0}\right)\\
\overset{H}{=}&\left(\lim_{x\to 0}2\cos 2x\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{1}\right)\\
=&(2\cos 0)(3\cos 0)\\
=&6
\end{aligned}$$

PROBLEMA 2

Sea

$$f(x) = \frac{x}{e^{2x}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) Demostrar que $f(x)$ alcanza un valor máximo absoluto.

(b) Hallar el valor máximo absoluto de $f(x)$.

Solución

Notamos que f es continua y diferenciable en todo su dominio $\mathbb{R}$.

Usando la regla del cociente (o la regla del producto)

$$f'(x) = \frac{1-2x}{e^{2x}}$$

Como $e^{2x} > 0$ y $g(x) = 1 - 2x$ es una función decreciente,

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff x < 1/2 \\ f'(x) = 0 &\iff x = 1/2 \\ f'(x) < 0 &\iff x > 1/2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f(x) \text{ es creciente} &\iff x < 1/2 \\ f(x) \text{ es decreciente} &\iff x > 1/2 \end{aligned}$$

Concluimos que $f(x)$ alcanza un valor máximo absoluto en $x = 1/2$.

El valor máximo absoluto de $f(x)$ es

$$f(1/2) = \frac{1}{2e}$$

PROBLEMA 3

Hallar el valor único de la constante a tal que el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{2x} - 3x}{x^2}$$

tiene un valor finito. Evaluar el límite con ese valor de a.

Solución

Si sustituimos $x = 0$, para cualquier valor de la constante a obtenemos la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Aplicando la regla de L'Hospital

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{2x} - 3x}{x^2} \\ \overset{H}{=} &\lim_{x \to 0} \frac{ae^{ax} - 2e^{2x} - 3}{2x} \\ \to &\frac{a-5}{0} \end{aligned}$$

Para cualquier $a \neq 5$, el límite será $\pm\infty$.

Pero si $a = 5$ obtenemos la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ dos veces y aplicamos la regla de L'Hospital dos veces.

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - e^{2x} - 3x}{x^2} \qquad \left(\frac{0}{0}\right) \\ \overset{H}{=} &\lim_{x \to 0} \frac{5e^{5x} - 2e^{2x} - 3}{2x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right) \\ \overset{H}{=} &\lim_{x \to 0} \frac{25e^{5x} - 4e^{2x}}{2} \\ = &\frac{21}{2} \end{aligned}$$

PROBLEMA 4

Evaluar esta integral definida.

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$$

Solución

Sustituimos

$$x = t^2, \quad dx = 2t\,dt, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$$

y obtenemos la integral transformada

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt$$

$$2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}\,dt$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\,dt$$

$$= 2\left(t - \tan^{-1} t\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$

PROBLEMA 5

Evaluar

$$\lim_{h\to 0} \frac{5-\sqrt{h^2+8h+25}}{5h\sqrt{h^2+8h+25}}$$

interpretando el límite como la derivada de una función apropiada $f(x)$.

Solución

Recordamos la definición de la derivada

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Escrita de otra manera (conveniente para nuestro objetivo)

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(a+h)-f(a)\Big) = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]\Bigg|_{x=a}$$

Re-escribimos el límite en una forma conveniente para aplicar la definición.

$$\lim_{h\to 0} \frac{5-\sqrt{h^2+8h+25}}{5h\sqrt{h^2+8h+25}}$$

$$=\lim_{h\to 0} \frac{5-\sqrt{(h+4)^2+9}}{5h\sqrt{(h+4)^2+9}}$$

$$=\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{5-\sqrt{(h+4)^2+9}}{5\sqrt{(h+4)^2+9}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{5}{5\sqrt{(h+4)^2+9}} - \frac{\sqrt{(h+4)^2+9}}{5\sqrt{(h+4)^2+9}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{(h+4)^2+9}} - \frac{1}{5}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{(4+h)^2+9}} - \frac{1}{\sqrt{4^2+9}}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\right]\Bigg|_{x=4}$$

$$=-\frac{x}{(x^2+9)^{3/2}}\Bigg|_{x=4}$$

$$=-\frac{4}{125}$$

PROBLEMA 6

Evaluar

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+i)^2}$$

interpretando el límite como una integral definida de la forma

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

para una función apropiada $f(x)$.

Solución

Usando extremos derechos y n subintervalos, la definición de la integral definida con sumas de Riemann se puede escribir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\Delta x\right)\Delta x, \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

En el caso especial $a=0$ y $b=1$ la definición simplifica a

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

Manipulamos el término general de la serie para escribirlo en una forma conveniente para aplicar la definición.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+i)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{n}{n^2}}{(\frac{n+i}{n})^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{i}{n})^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2}\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\ dx$$

$$=-\left.\frac{1}{1+x}\ \right|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}$$

PROBLEMA 7

Dado

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{e^t - 1}\, dt$$

Evaluar

$$\lim_{x\to\infty} F(x)$$

Solución

Usando la sustitución $u = e^t - 1,\ du = e^t dt$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^t - 1}\, dt &= \int \frac{1}{u(u+1)}\, du \\
&= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du \\
&= \ln|u| - \ln|u+1| \\
&= \ln\left|\frac{u}{u+1}\right| \\
&= \ln\left|\frac{e^t - 1}{e^t}\right| \\
&= \ln|1 - e^{-t}| \\
&= \ln(1 - e^{-t})
\end{aligned}$$

Pudimos eliminar el valor absoluto porque $e^{-t} < 1$ para $t > 0$.

(Como alternativa, podemos multiplicar el numerador y el denominador por e^{-t} y luego sustituir $u = 1 - e^{-t}$.)
Por el Teorema Fundamental de Cálculo

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{e^t - 1}\, dt = \ln(1 - e^{-t})\Big|_1^x = \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-1}}\right)$$

Como $e^{-x} \to 0$ según $x \to \infty$,

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \ln\left(\frac{1}{1 - e^{-1}}\right) = \ln\left(\frac{e}{e-1}\right)$$

PROBLEMA 8

Demostrar que esta serie converge absolutamente. Hallar la suma de la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$$

Solución

La serie converge por el Criterio del Cociente.

Para hallar la suma, recordamos la serie de Maclaurin

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \tan^{-1} x$$

y re-escribimos la serie dada en una forma conveniente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \frac{1}{(\sqrt{3})^{2n}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \frac{1}{(\sqrt{3})^{2n}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \frac{1}{(\sqrt{3})^{2n+1}}$$

$$= \sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2n+1}$$

$$= \sqrt{3} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \pi$$

PROBLEMA 9

Considera la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$$

(a) Hallar una fórmula en forma cerrada $f(N)$ para la N-ésima suma parcial

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$$

de la serie.

(b) Hallar la suma de la serie.

Solución

La descomposición en fracciones parciales del término general de la serie es

$$\frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Por lo tanto la N-ésima suma parcial es

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

Escribimos S_N en la forma

$$S_N = \left\{ \begin{array}{cccccccccccccc}
\frac{2}{1} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & & & & & & & & & & & \\
 & +\frac{2}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & & & & & & & & & & \\
 & & +\frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & & & & & & & & & \\
 & & & +\frac{2}{4} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & & & & & & & & \\
 & & & & +\frac{2}{5} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{7} & & & & & & & \\
 & & & & & +\frac{2}{6} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & & & & & & \\
 & & & & & & +\frac{2}{7} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{9} & & & & & \\
 & & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\
 & & & & & & & & & +\frac{2}{N-2} & -\frac{1}{N-1} & -\frac{1}{N} & & \\
 & & & & & & & & & & +\frac{2}{N-1} & -\frac{1}{N} & -\frac{1}{N+1} & \\
 & & & & & & & & & & & +\frac{2}{N} & -\frac{1}{N+1} & -\frac{1}{N+2}
\end{array} \right\}$$

y observamos que tenemos una serie telescópica en donde todos los términos se cancelan excepto tres al principio y tres al final

$$S_N = \frac{2}{1} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}$$

$$S_N = \frac{5}{2} - \frac{2}{N+1} - \frac{1}{N+2}$$

La suma de la serie es

$$S = \lim_{N \to \infty} S_N = \frac{5}{2}$$

PROBLEMA 10

El estrofoide mostrado en la figura abajo tiene la ecuación cartesiana

$$y^2(a+x) = x^2(a-x)$$

en donde a es una constante positiva. Hallar el área de la región sombreada.

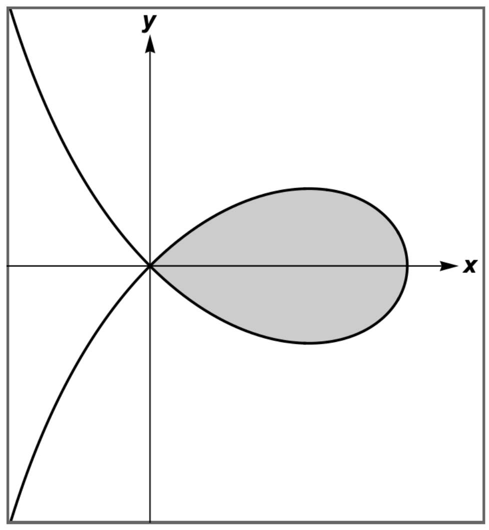

Figura 1: Estrofoide $y^2(a+x) = x^2(a-x)$

Solución

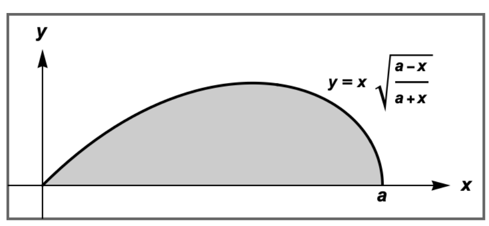

Figura 2: Estrofoide $y^2(a+x) = x^2(a-x), \quad y \geq 0$

$$\text{Area} = 2\int_0^a x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\; dx$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $a-x$ obtenemos

$$\text{Area} = 2\int_0^a x\frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$$

La sustitución trigonométrica $x = a\sin\theta,\ dx = a\cos\theta d\theta$ transforma la integral en

$$2a^2\int_0^{\pi/2}\left(\sin\theta - \sin^2\theta\right)d\theta = \frac{1}{2}(4-\pi)a^2$$