Soluciones Problemas Misceláneos de Cálculo Parte 1

Departamento de Ciencias Matemáticas
Recinto Universitario de Mayagüez
Universidad de Puerto Rico

7 de febrero de 2024

PROBLEMA 1

Evaluar esta integral.

$$\int_0^2 \lfloor x^2 \rfloor \, x \, dx$$

en donde $\lfloor y \rfloor$ es la función parte entera: Si la expansión decimal de $y \geq 0$ es $a.bcde\ldots$, entonces

$$\lfloor y \rfloor = \lfloor a.bcde\ldots \rfloor = a \qquad (a \geq 0)$$

(Otros nombres y símbolos: función piso, función entero mayor, $E(y)$, $Ent(y)$, $[y]$.)

Solución

Primero calculamos $\lfloor x^2 \rfloor$.

$$\sqrt{k} \leq x < \sqrt{k+1} \qquad \Longrightarrow \qquad k \leq x^2 < k+1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lfloor x^2 \rfloor = k$$

Para poder evaluar la integral, la expresamos como la suma de integrales en intervalos de tipo

$$\left(\sqrt{k}, \sqrt{k+1}\right), \qquad k \text{ entero}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \lfloor x^2 \rfloor \, x \, dx &= \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{1}} 0x \, dx + \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{2}} 1x \, dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2x \, dx + \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4}} 3x \, dx \\
&= 0 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{\sqrt{1}}^{\sqrt{2}} + \; x^2 \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + \frac{3}{2}x^2 \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4}} \\
&= \frac{1}{2}(2-1) + (3-2) + \frac{3}{2}(4-3) \\
&= 3
\end{aligned}$$

PROBLEMA 2

Hallar los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Solución

Los puntos de inflexión son los puntos en donde $f''(x) = 0$ y $f''(x)$ cambia de signo. Esto implica un cambio en la concavidad de la curva.

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x)$$

$$f''(x) = e^{-x^2}(-2x)(-2x) + e^{-x^2}(-2)$$

$$f''(x) = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$$

$$f''(x) = 4\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}$$

Los puntos de inflexión son

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

PROBLEMA 3

Evaluar esta integral

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

Solución

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,(2x\,dx) + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Ena la primera integral, hacemos el cambio de variable

$$u = x^2+1, \qquad du = 2x\,dx, \qquad 0 \le x \le \sqrt{3} \longleftrightarrow 1 \le u \le 4$$

y continuamos

$$= \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{u}\,du + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln u\,\Big|_1^4 + \tan^{-1} x\,\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 1) + \left(\tan^{-1}\sqrt{3} - \tan^{-1} 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}(2\ln 2 - 0) + \left(\frac{\pi}{3} - 0\right)$$

$$= \ln 2 + \frac{\pi}{3}$$

PROBLEMA 4

Hallar el valor máximo y el valor mínimo de la función

$$f(x) = x\sqrt{2-x^2}$$

en su dominio.

Solución

Dominio

$$2 - x^2 \geq 0$$
$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

Derivada

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x)'\left(\sqrt{2-x^2}\right) + (x)\left(\sqrt{2-x^2}\right)' \\
&= (1)\left(\sqrt{2-x^2}\right) + (x)\left(\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}\right) \\
&= \sqrt{2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} \\
&= \frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} \\
&= \frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}}
\end{aligned}$$

Los puntos críticos son

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{2-x^2}} = 0$$

$$1 - x^2 = 0$$

$$x = 1 \quad x = -1$$

Comparando los valores de $f(x)$ en los puntos críticos y en los extremos del intervalo $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

x	$f(x)$
$-\sqrt{2}$	0
-1	-1
1	1
$\sqrt{2}$	0

max: $f(1) = 1$
min: $f(-1) = -1$

PROBLEMA 5

Hallar los puntos de la parábola

$$y = 1 - x^2$$

más cercanos al origen.

Solución

Cualquier punto de la parábola tiene coordenadas

$$(x, 1 - x^2)$$

La distancia del punto $(x, 1 - x^2)$ al origen es

$$D(x) = \sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

Como la función raiz cuadrada es creciente, es equivalente hallar el valor mínimo de

$$g(x) = D(x)^2 = x^4 - x^2 + 1$$

Observamos que

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \infty$$

Derivada

$$g'(x) = 4x^3 - 2x = 4x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 4x\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Puntos críticos

$$x = 0, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Comparando valores

x	$1 - x^2$	$g(x)$	$D(x)$
$-\infty$	$-\infty$	∞	∞
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
0	1	1	1
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
∞	∞	∞	∞

Los puntos de la parábola más cercanos al origen son

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

La distancia mínima es

$$D\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Alternativa
Completando el cuadrado

$$g(x) = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Se alcanza un valor mínimo cuando

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0$$

Alternativa
Recta tangente y recta normal.

PROBLEMA 6

Suponer que una caja rectangular tiene una base cuadrada y que su área de superficie es $24cm^2$. Hallar el volumen máximo posible de la caja.

Solución

Suponer que las dimensiones de la caja son x por x por y. Entonces el volumen V y el área de superficie S de la caja están dados por las fórmulas

$$V = x^2y \quad \text{y} \quad S = 2x^2 + 4xy, \quad (x > 0, y > 0)$$

El problema es un problema de optimización: Hallar el valor máximo de la función $V = x^2y$ sujeto a la restricción $2x^2 + 4xy = 24$. Despejamos por y en la restricción y luego sustituimos en la fórmula de volumen:

$$2x^2 + 4xy = 24$$

$$x^2 + 2xy = 12$$

$$y = \frac{12 - x^2}{2x}$$

$$V = x^2y$$

$$= x^2\left(\frac{12 - x^2}{2x}\right)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}(12x - x^3)$$

Calculamos el punto crítico:

$$V'(x) = \frac{1}{2}(12 - 3x^2) = 0$$

$$x = 2$$

Para clasificar como máximo o mínimo:

$$V''(x) = -3x$$

$$V''(2) = -6 < 0$$

Es un máximo. La base es un cuadrado de dimensiones $2cm$ por $2cm$. La altura es

$$y = \frac{12 - 2^2}{2(2)} = 2$$

La altura también es $2cm$, por lo tanto la caja de volumen máximo es un cubo de dimensiones $2cm$ por $2cm$ por $2cm$. El volumen máximo posible es

$$V = 2^3 = 8cm^3$$

PROBLEMA 7

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = 2x^3 + 3x^2 + 6x$$

en el punto

$$x = 1$$

Solución

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x \qquad \Longrightarrow \qquad f(1) = 11$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + 6 \qquad \Longrightarrow \qquad f'(1) = 18$$

Recta tangente

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

$$y = 11 + 18(x - 1)$$

PROBLEMA 8

Hallar la ecuación de la recta ℓ que es tangente a las curvas

$$y = f(x) = x^2 + x + 5 \qquad \text{y} \qquad y = g(x) = x^2 - 5x + 20$$

en los puntos P y Q, respectivamente. Ver la figura.

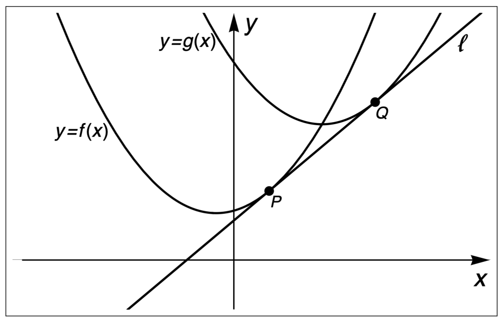

Figura 1: Recta tangente común a dos parábolas

Solución

Ver la figura.

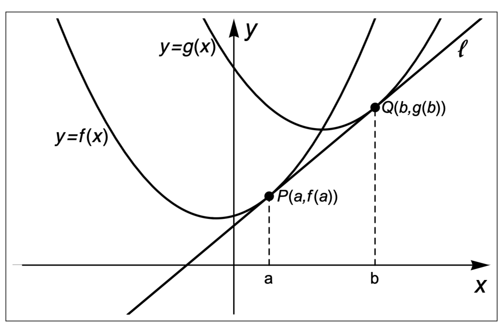

Figura 2: Enter Caption

Como la recta ℓ es simultánemente

1. la recta determinada por los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, g(b))$,
2. la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = a$,
3. la recta tangente a la curva $y = g(x)$ en $x = b$,

las pendientes calculadas a base de estas tres condiciones serán iguales:

$$\frac{g(b) - f(a)}{b - a} = f'(a) = g'(b)$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones.

$$f'(a) = g'(b)$$

$$2a + 1 = 2b - 5$$

$$b - a = 3$$

$$b = a + 3$$

$$\frac{g(b)-f(a)}{b-a} = f'(a)$$

$$\frac{(b^2-5b+20)-(a^2+a+5)}{b-a} = 2a+1$$

$$\frac{(a+3)^2-5(a+3)+20-a^2-a-5}{3} = 2a+1$$

$$a^2+6a+9-5a-15+20-a^2-a-5 = 6a+3$$

$$9 = 6a+3$$

$$a = 1$$

$$b = 4$$

La ecuación de la recta ℓ es

$$y = f(1)+f'(1)(x-1)$$

$$y = 7+3(x-1)$$

$$y = 3x+4$$

PROBLEMA 9

Hallar los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$$

Solución

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24$$

$$f''(x) = 12(x^2 - 3x + 2)$$

$$f''(x) = 12(x-1)(x-2)$$

$f''(x) = 0$ en $x = 1$ y $x = 2$ y cambia de signo en esos puntos. Por lo tanto, son puntos de inflexión de $f(x)$.

PROBLEMA 10

Hallar los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

Solución

Aplicamos la regla de la cadena y la regla del cociente para calcular $f''(x)$.

$$f(x) = (x^2+3)^{-1}$$

$$f'(x) = (-1)(x^2+3)^{-2}(2x)$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{(2)(x^2+3)^2 - (2x)(2(x^2+3)(2x))}{(x^2+3)^4}$$

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+3)^2 - 8x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$$

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+3)\left((x^2+3) - 4x^2\right)}{(x^2+3)^4}$$

$$f''(x) = -\frac{2\left(3-3x^2\right)}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

$f''(x)$ (y por lo tanto la concavidad) cambia de signo en $x = \pm 1$.

1. PROBLEMA 11

Hallar la ecuación de la recta tangente al círculo

$$x^2 + y^2 = 25$$

en el punto

$$(3, 4)$$

Solución

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$m_{tan} = -\frac{3}{4}$$

$$y - y_0 = m_{tan}(x - x_0)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

$$y = 4 - \frac{3}{4}(x - 3)$$

2. PROBLEMA 12

Hallar las coordenadas de los puntos de la elipse

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

en donde la recta tangente es horizontal.

Solución

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

$$2x - (1y + xy') + 2yy' = 0$$

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0$$

$$(2x - y) + (2y - x)y' = 0$$

$$y' = -\frac{2x - y}{2y - x}$$

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

La recta tangente es horizontal cuando

$$y' = 0$$

$$\frac{2x - y}{x - 2y} = 0$$

$$2x - y = 0$$

$$y = 2x$$

Sustituimos $y = 2x$ en la ecuación de la elipse y obtenemos

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

$$x^2 - x(2x) + (2x)^2 = 1$$

$$x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 1$$

$$3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Los puntos son

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

3. PROBLEMA 13

Evaluar esta integral

$$\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx$$

Solución

Hacemos la sustitución

$$u = 9 - x^2, \qquad du = -2xdx, \qquad x = 0 \implies u = 9, \qquad x = 3 \implies u = 0$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,(-2xdx) \\
&= -\frac{1}{2}\int_9^0 \sqrt{u}\,du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^9 u^{1/2}\,du \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_0^9 \\
&= \frac{1}{3}\left(9^{3/2}\right) \\
&= 9
\end{aligned}$$

4. PROBLEMA 14

Evaluar esta integral.

$$\int \frac{1}{(\cos x + \operatorname{sen} x)^2}\, dx$$

Solución

Multiplicamos numerador y denominador por $\sec^2 x$.

$$\int \frac{1}{(\cos x + \operatorname{sen} x)^2}\, dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 \sec^2 x}\, dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{(\cos x \sec x + \operatorname{sen} x \sec x)^2}\, dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}\, dx$$

Sustituimos

$$u = 1 + \tan x, \qquad du = \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \frac{1}{(1 + \tan x)^2} (\sec^2 x dx)$$

$$= \int \frac{1}{u^2}\, du$$

$$= -\frac{1}{u} + C$$

$$= -\frac{1}{1 + \tan x} + C$$

5. Problema 15

Hallar el área de la región encerrada por las curvas

$$xy = 4 \qquad \text{y} \qquad x + y = 5$$

Solución

Despejamos por y para expresar las curvas como funciones

$$y = \frac{4}{x} \qquad \text{y} \qquad y = 5 - x$$

Los puntos de intersección se encuentran por inspección o resolviendo

$$\frac{4}{x} = 5 - x$$

$$4 = 5x - x^2$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$x = 1 \quad x = 4$$

El área de la región es

$$\text{Area} = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx$$

$$= \left(5x - \frac{1}{2}x^2 - 4\ln x\right)\Big|_1^4$$

$$= \frac{15}{2} - 8\ln 2$$

Ver figura.

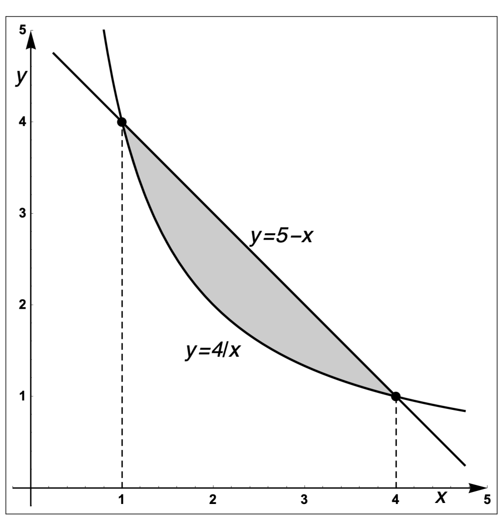

Figura 3: Area entre hipérbola rectangular y recta

6. PROBLEMA 16

Hallar la ecuación de la recta tangente a esta curva en $x = 1$.

$$y = \int_0^x \frac{t}{1+t^4}\,dt$$

Solución

Escribiendo

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^4}\,dt$$

y aplicando el Teorema Fundamental de Cálculo,

$$f'(x) = \frac{x}{1+x^4}$$

y

$$f'(1) = \frac{1}{1+1^4} = \frac{1}{2}$$

Por otro lado

$$f(1) = \int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+(t^2)^2}(2t\,dt)$$

Hacemos la sustitución

$$u = t^2, \quad du = 2t\,dt, \qquad 0 \leq t \leq 1 \longleftrightarrow 0 \leq u \leq 1$$

y obtenemos

$$\begin{aligned}
f(1) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= \frac{1}{2}\arctan u\,\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\arctan 1 - \arctan 0\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \\
f(1) &= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Ahora sustituimos en la ecuación de la recta tangente.

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$y = f(1) + f'(1)(x-1)$$

$$y = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}(x-1)$$

7. PROBLEMA 17

Hallar los puntos críticos de la función

$$f(x) = \int_{x}^{ex} e^{-t^2}\, dt$$

Solución

Escribimos

$$f(x) = \int_{0}^{ex} e^{-t^2}\, dt - \int_{0}^{x} e^{-t^2}\, dt$$

Por el Teorema Fundamental de Cálculo,

$$f'(x) = e^{-(ex)^2}(ex)' - e^{-x^2}$$

$$f'(x) = e^{-e^2x^2}(e) - e^{-x^2}$$

$$f'(x) = e^{1-e^2x^2} - e^{-x^2}$$

Puntos críticos

$$f'(x) = 0$$

$$e^{1-e^2x^2} - e^{-x^2} = 0$$

$$e^{1-e^2x^2} = e^{-x^2}$$

$$\ln\left(e^{1-e^2x^2}\right) = \ln\left(e^{-x^2}\right)$$

$$1 - e^2x^2 = -x^2$$

$$1 = e^2x^2 - x^2$$

$$1 = x^2(e^2 - 1)$$

$$x^2 = \frac{1}{e^2 - 1}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{e^2 - 1}}$$