Problemas misceláneos de Cálculo Parte 2

Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez

6 de marzo de 2024

Nota Importante

La Competencia de Cálculo de este año (2024) no incluirá técnicas avanzadas de integración ni series infinitas.

PROBLEMA 1

Evaluar

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n+i)^2}$$

interpretando el límite como una integral definida de la forma

$$\int_0^1 f(x)\ dx$$

para una función apropiada f.

PROBLEMA 2

Evaluar

$$\lim_{h\to 0} \frac{5-\sqrt{h^2+8h+25}}{5h\sqrt{h^2+8h+25}}$$

interpretando el límite como la derivada de una función apropiada $f(x)$.

PROBLEMA 3

Calcular la derivada de la función

$$f(x) = \tan^{-1}\left(\sqrt{e^{2x} - 1}\right)$$

Simplifica tu respuesta completamente.

PROBLEMA 4

Demostrar que la función

$$f(x) = \tan^{-1}(x) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \neq 0$$

tiene un valor constante en cada uno de los intervaloss $(-\infty, 0)$ and $(0, \infty)$ y hallar el valor de la función en cada intervalo.

PROBLEMA 5

Sea

$$f(x) = \frac{x}{e^{2x}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) Demostrar que $f(x)$ alcanza un valor máximo absoluto.

(b) Hallar el valor máximo absoluto de $f(x)$.

PROBLEMA 6

Hallar el valor máximo absoluto de la función

$$f(x) = \arctan 3x - \arctan x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA 7

Sea

$$f(x) = x^x, \qquad x > 0$$

Demostrar que $f(x)$ tiene un valor mínimo absoluto y hallar el valor.

PROBLEMA 8

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y = x^3 + 6x^2 + x + 8$$

que pasan por el origen.

PROBLEMA 9

Evaluar este límite.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x \sin 3x}{x \sin 2x}\right)$$

PROBLEMA 10

Evaluar este límite.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 5x)} \right)$$

PROBLEMA 11

Evaluar este límite.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3} \right)$$

PROBLEMA 12

Evaluar este límite.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{p \arctan qx - q \arctan px}{x^3} \right)$$

PROBLEMA 13

Suponer que

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

y sea

$$f(x) = (1 + e^{g(x)})^{1/g(x)}$$

Evaluar este límite.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

PROBLEMA 14

Evaluar este límite.

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x - \sin x}{(x \sin x)^{3/2}} \right)$$

PROBLEMA 15

Hallar el valor único de la constante a tal que el límite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{ax} - e^{2x} - 3x}{x^2} \right)$$

tiene un valor finito. Evaluar el límite con ese valor de a.

PROBLEMA 16

La ecuación

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

implícitamente define dos funciones f y g (ver la figura abajo). Hallar el dominio y rango de cada

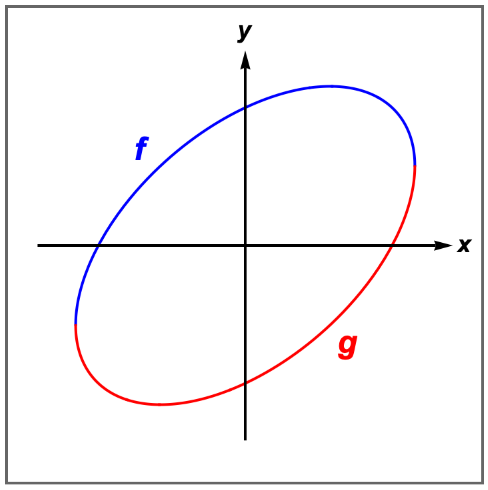

Figura 1: La elipse $x^2 - xy + y^2 = 1$

función. (Nota: la curva es una elipse. Ne se requiere hallar las funciones f and g explícitamente.)

PROBLEMA 17

Hallar la ecuaciones de las rectas tangentes a esta elipse que pasan por el origen.

$$x^2 + 2y^2 - 4\sqrt{3}y + 4 = 0$$

PROBLEMA 18

Evaluar esta integral.

$$\int_0^{\pi/4} \left(\cos^4\theta - \sin^4\theta\right) d\theta$$

PROBLEMA 19

Demostrar que si m and n son enteros distintos, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = 0$$

y si m y n son iguales, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx = \pi$$

PROBLEMA 20

Evaluar esta integral definida.

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\, dx$$

PROBLEMA 21

Usar la identidad

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\ dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)\ dx$$

para evaluar la integral definida

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\ dx$$

PROBLEMA 22

Evaluar esta integral definida.

$$\int_0^1 \sin^{-1}\left(\sqrt{x}\,\right) dx$$

PROBLEMA 23

Dado

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{e^t - 1}\, dt$$

Evaluar

$$\lim_{x \to \infty} F(x)$$

PROBLEMA 24

Evaluar esta integral definida.

$$\int_0^1 \frac{x^3 - 2x^2 - 2x}{x^4 + 4}\, dx$$

PROBLEMA 25

Sea

$$f(x) = \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

en donde a es una constante positiva. Hallar el área de la región R en el plano cartesiano en donde $f(x) \geq 0$.

PROBLEMA 26

La Cúbica de Tschirnhausen, graficada abajo, tiene ecuación cartesiana

$$27ay^2 = x^2(9a - x)$$

en donde a es una constante positiva. Calcular el área del "lazo".

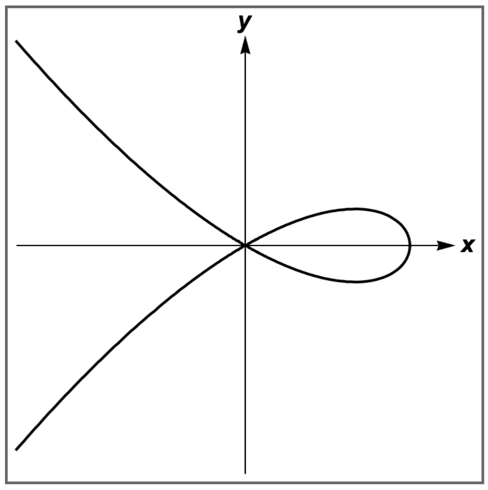

Figura 2: La Cúbica de Tschirnhausen

PROBLEMA 27

La Cisoide de Diocles graficada abajo (no a escala) tiene la ecuación Cartesiana

$$y^2(a - x) = x^3$$

La cisoide tiene una asíntota vertical en $x = a$. Calcular el área entre la cisoide y su asíntota.

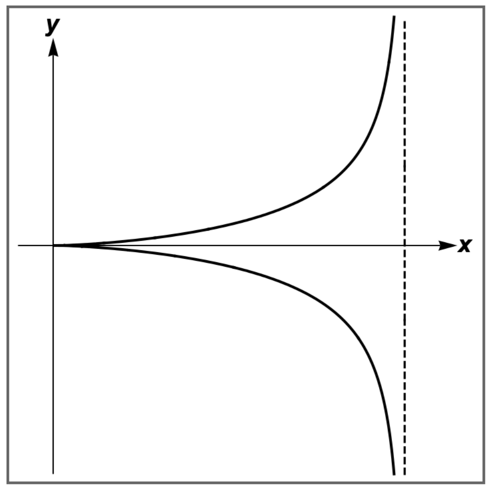

Figura 3: Cisoide de Diocles

PROBLEMA 28

La estrofoide graficada abajo tiene la ecuación paramétrica

$$y^2(a+x) = x^2(a-x)$$

Hallar el área del "lazo"(sombreado).

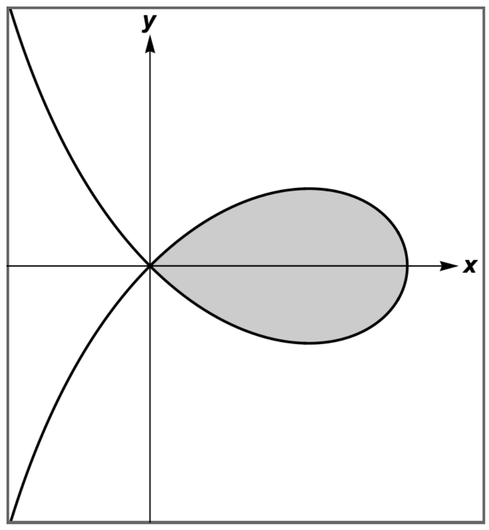

Figura 4: Estrofoide

PROBLEMA 29

Sea

$$f(x) = e^{-x} \operatorname{sen}(\pi x)$$

En la gráfica abajo (no a escala) se muestran tres de las infinitas oscilaciones de la curva $y = f(x)$. Hallar el área total de la región entera entre el eje x y la curva $y = f(x)$.

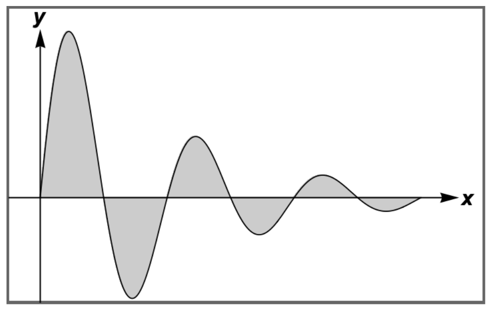

Figura 5: $y = f(x) = e^{-x} \operatorname{sen}(\pi x)$

PROBLEMA 30

Demostrar que esta serie converge absolutamente. Hallar la suma de la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$$

PROBLEMA 31

Considera la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$$

(a) Hallar una fórmula en forma cerrada $f(N)$ para la N-ésima suma parcial

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$$

de la serie.

(b) Hallar la suma de la serie.