SOLUCIONES
Problemas misceláneos de Cálculo Parte 2

Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez

6 de marzo de 2024

Nota Importante

La Competencia de Cálculo de este año (2024) no incluirá técnicas avanzadas de integración ni series infinitas.

PROBLEMA 1

Evaluar

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n+i)^2}$$

interpretando el límite como una integral definida de la forma

$$\int_0^1 f(x)\ dx$$

para una función apropiada f.

Solución

Usando extremos derechos y n subintervalos, la definición de la integral definida con sumas de Riemann se puede escribir

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\Delta x\right)\Delta x, \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

En el caso especial $a = 0$ y $b = 1$, la definición simplifica a

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

Manipulamos el término general de la serie para escribirlo en una forma conveniente para aplicar la definición.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n+i)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{n}{n^2}}{(\frac{n+i}{n})^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{i}{n})^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2}\frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\ dx$$

$$= -\frac{1}{1+x}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

PROBLEMA 2

Evaluar

$$\lim_{h\to 0} \frac{5-\sqrt{h^2+8h+25}}{5h\sqrt{h^2+8h+25}}$$

interpretando el límite como la derivada de una función apropiada $f(x)$.

Solución

Recordamos la definición de la derivada

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Escrita de otra manera (conveniente para nuestro objetivo)

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(a+h)-f(a)\Big) = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]\Bigg|_{x=a}$$

Re-escribimos el límite en una forma conveniente para aplicar la definición.

$$\lim_{h\to 0} \frac{5-\sqrt{h^2+8h+25}}{5h\sqrt{h^2+8h+25}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5-\sqrt{(h+4)^2+9}}{5h\sqrt{(h+4)^2+9}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{5-\sqrt{(h+4)^2+9}}{5\sqrt{(h+4)^2+9}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{5}{5\sqrt{(h+4)^2+9}} - \frac{\sqrt{(h+4)^2+9}}{5\sqrt{(h+4)^2+9}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{(h+4)^2+9}} - \frac{1}{5}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{(4+h)^2+9}} - \frac{1}{\sqrt{4^2+9}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\right]\Bigg|_{x=4}$$

$$= -\frac{x}{(x^2+9)^{3/2}}\Bigg|_{x=4}$$

$$= -\frac{4}{125}$$

PROBLEMA 3

Calcular la derivada de la función

$$f(x) = \tan^{-1}\left(\sqrt{e^{2x} - 1}\right)$$

Simplifica tu respuesta completamente.

Solución

Usando la Regla de la Cadena,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\sqrt{e^{2x} - 1}\right)^2} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{2x} - 1\right)^{-1/2} \cdot \left(e^{2x} \cdot 2 - 0\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + e^{2x} - 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^{2x} - 1}} \cdot \left(2e^{2x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{2x}} \cdot \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x} - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$$

PROBLEMA 4

Demostrar que la función

$$f(x) = \tan^{-1}(x) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \neq 0$$

tiene un valor constante en cada uno de los intervaloss $(-\infty, 0)$ and $(0, \infty)$ y hallar el valor de la función en cada intervalo.

Solución

Notar que f es continua y diferenciable en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, pero es indefinida en $x = 0$.
Usando la Regla de la Cadena,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

$$f'(x) = 0$$

Por lo tanto, f es constante en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ and $(0, \infty)$. Sustituyendo un valor conveniente de x de cada intervalo encontramos que

$$f(\pm 1) = 2\tan^{-1}(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 5

Sea
$$f(x) = \frac{x}{e^{2x}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) Demostrar que $f(x)$ alcanza un valor máximo absoluto.

(b) Hallar el valor máximo absoluto de $f(x)$.

Solución

Notamos que f es continua y diferenciable en todo su dominio $\mathbb{R}$.

Usando la regla del cociente (o la regla del producto)
$$f'(x) = \frac{1-2x}{e^{2x}}$$

Como $e^{2x} > 0$ y $g(x) = 1 - 2x$ es una función decreciente,
$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff x < 1/2 \\ f'(x) = 0 &\iff x = 1/2 \\ f'(x) < 0 &\iff x > 1/2 \end{aligned}$$

Por lo tanto
$$\begin{aligned} f(x) \text{ es creciente} &\iff x < 1/2 \\ f(x) \text{ es decreciente} &\iff x > 1/2 \end{aligned}$$

Concluimos que $f(x)$ alcanza un valor máximo absoluto en $x = 1/2$.

El valor máximo absoluto de $f(x)$ es
$$f(1/2) = \frac{1}{2e}$$

PROBLEMA 6

Hallar el valor máximo absoluto de la función

$$f(x) = \arctan 3x - \arctan x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Solución

Observamos que f es una función diferenciable y por lo tanto continua en todo su dominio $(-\infty, \infty)$. Además, f es una función impar y tiene un cero único en $x = 0$. El comportamiento de f en los extremos $\pm\infty$ es

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

Derivando,

$$f'(x) = \frac{2(1 - 3x^2)}{(1 + x^2)(1 + 9x^2)}$$

Los números críticos de f son

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Examinando los signos de $f'(x)$, obtenemos

$$\begin{array}{ll} \text{f(x) es decreciente si} & x < -1/\sqrt{3} \\ \text{f(x) es creciente si} & -1\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3} \\ \text{f(x) es decreciente si} & x > 1/\sqrt{3} \end{array}$$

Concluimos que f tiene mínimo absoluto en $x = -1/\sqrt{3}$ y un máximo absoluto en $x = 1/\sqrt{3}$. El rango de f es

$$\left[f(-1/\sqrt{3}), f(1/\sqrt{3}) \right] = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$$

Bosquejo de la gráfica de f.

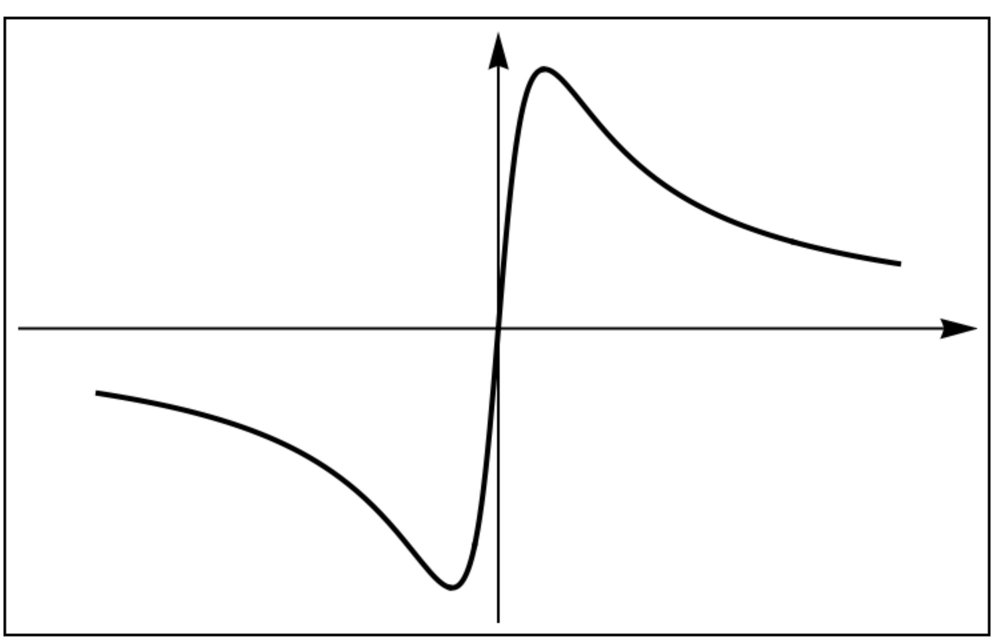

Figura 1: $f(x) = \arctan 3x - \arctan x$

PROBLEMA 7

Sea

$$f(x) = x^x, \qquad x > 0$$

Demostrar que $f(x)$ tiene un valor mínimo absoluto y hallar el valor.

Solución

Notamos que f is continua y diferenciable en todo su dominio. Escribiendo

$$f(x) = e^{x \ln x}$$

o usando Diferenciación Logarítmica, obtenemos

$$f'(x) = f(x)(1 + \ln x)$$

Como $f(x) > 0$, y $g(x) = 1 + \ln x$ es una función creciente con cero único en $x = 1/e$, tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\Longleftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e} \\ f'(x) = 0 &\Longleftrightarrow x = \frac{1}{e} \\ f'(x) > 0 &\Longleftrightarrow x > \frac{1}{e} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} f(x) \text{ es decreciente} &\Longleftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e} \\ f(x) \text{ es creciente} &\Longleftrightarrow x > \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Podemos concluir que $f(x)$ tiene un valor mínimo absoluto en $x = 1/e$.
El valor mínimo absoluto es

$$f(1/e) = e^{-1/e}$$

PROBLEMA 8

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y = x^3 + 6x^2 + x + 8$$

que pasan por el origen.comment

Solución

Sea $y = f(x) = x^3 + 6x^2 + x + 8$. Entonces $f'(x) = 3x^2 + 12x + 1$.
Una línea recta por el origen y un punto (a, b) tiene pendiente $m = b/a$ y ecuación $y = \frac{b}{a}x$. Por lo tanto, si la tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$ de la curva pasa por el origen, su pendiente debe ser

$$f'(a) = \frac{f(a)}{a}$$

Luego

$$\begin{aligned} af'(a) &= f(a) \\ a(3a^2 + 12a + 1) &= a^3 + 6a^2 + a + 8 \\ a^3 + 3a^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Por inspección encontramos una raiz $a = 1$. Usando división sintética, obtenemos la factorización

$$a^3 + 3a^2 - 4 = (a - 1)(a + 2)^2$$

Por lo tanto, las dos raices son $a = 1$ y $a = -2$. Los puntos de tangencia son $(1, 16)$ y $(-2, 22)$. Las pendientes de las rectas tangentes son $f'(1) = 16$ and $f'(-2) = -11$. Las ecuaciones de las rectas tangentes son

$$\begin{aligned} y &= 16x \\ y &= -11x \end{aligned}$$

Bosquejo de la gráfica (no a escala)

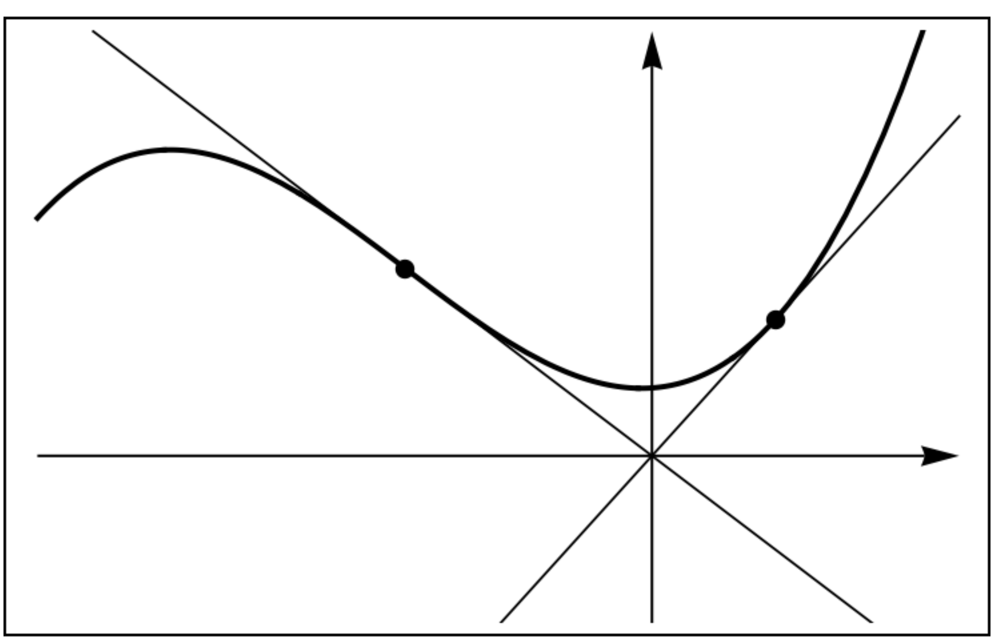

Figura 2: $y = x^3 + 6x^2 + x + 8, \quad y = 16x, \quad y = -11x$

PROBLEMA 9

Evaluar este límite.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x \sin 3x}{x\sin 2x}\right)$$

Solución

Aplicamos la identidad trigonométrica $\sin 2u = 2\sin u \cos u$ para simplificar y luego aplicamos la regla de L'Ĥospital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x \sin 3x}{x\sin 2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin 2x \cos 2x \sin 3x}{x\sin 2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cos 2x \sin 3x}{x}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to 0} 2\cos 2x\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\right) \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{H}{=}\left(\lim_{x\to 0} 2\cos 2x\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{1}\right)$$

$$=(2\cos 0)(3\cos 0)$$

$$=6$$

PROBLEMA 10

Evaluar este límite.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 5x)}\right)$$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 5x)}\right) \longrightarrow \frac{0}{0} \qquad \text{(Indeterminado, L'Hospital)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 5x)}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{-3\tan 3x}{-5\tan 5x}\right) \longrightarrow \frac{0}{0} \qquad \text{(Indeterminado, L'Hospital)}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{-9\sec^2 3x}{-25\sec^2 5x}\right)$$

$$= \frac{9\sec^2 0}{25\sec^2 0}$$

$$= \frac{9}{25}$$

PROBLEMA 11

Evaluar este límite.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}\right)$$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}\right) \longrightarrow \frac{0}{0} \qquad \text{(Indeterminado, L'Hospital)}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}\right) &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2}\left(\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\
&= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}}\right)\\
&= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2}}\right)\\
&= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1-x^2)-(1-4x^2)}{x^2\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2})}\right)\\
&= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^2}{x^2\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2})}\right)\\
&= 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2})}\right)\\
&= 2\left(\frac{1}{(1)(1)(1+1)}\right)\\
&= 1
\end{aligned}$$

PROBLEMA 12

Evaluar este límite.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{p \arctan qx - q \arctan px}{x^3} \right)$$

Solución

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{p \arctan qx - q \arctan px}{x^3} \right) \longrightarrow \frac{0}{0} \quad \text{(Indeterminate, L'Hospital)}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \left(\frac{p \arctan qx - q \arctan px}{x^3} \right) &\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{3x^2} \left(p \frac{q}{1 + q^2x^2} - q \frac{p}{1 + p^2x^2} \right) \\
&= \frac{pq}{3} \lim_{x \to 0} \left(\frac{(1 + p^2x^2) - (1 + q^2x^2)}{x^2(1 + p^2x^2)(1 + q^2x^2)} \right) \\
&= \frac{pq}{3} \lim_{x \to 0} \left(\frac{p^2 - q^2}{(1 + p^2x^2)(1 + q^2x^2)} \right) \\
&= \frac{pq}{3} \frac{p^2 - q^2}{(1 + 0)(1 + 0)} \\
&= \frac{1}{3} pq(p^2 - q^2)
\end{aligned}$$

PROBLEMA 13

Suponer que

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

y sea

$$f(x) = (1 + e^{g(x)})^{1/g(x)}$$

Evaluar este límite.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

Solución

$$\lim_{x\to\infty} (1 + e^{g(x)})^{1/g(x)} \longrightarrow \infty^0 \quad \text{(Indeterminate, L'Hospital)}$$

Sea

$$L = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (1 + e^{g(x)})^{1/g(x)}$$

Entonces

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln(1 + e^{g(x)})}{g(x)} \right) \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{g(x)} g'(x)}{(1 + e^{g(x)}) g'(x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{g(x)}}{1 + e^{g(x)}}$$

$$\ln L = 1$$

$$L = e$$

PROBLEMA 14

Evaluar este límite.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-\sin x}{(x\sin x)^{3/2}}\right)$$

Solución usando series de MacLaurin

$$x-\sin x = x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^5)\right)$$

$$=\frac{x^3}{6}+o(x^5)$$

$$x-\sin x = x^3\left(\frac{1}{6}+o(x^2)\right)$$

Además

$$(x\sin x)^{3/2}=\big(x(x+o(x^3))\big)^{3/2}$$

$$=\big(x^2(1+o(x^2))\big)^{3/2}$$

$$=x^3\left(1+o(x^2)\right)^{3/2}$$

Dividiendo y cancelando x^3

$$\frac{x-\sin x}{(x\sin x)^{3/2}}=\frac{\frac{1}{6}+o(x^2)}{\big(1+o(x^2)\big)^{3/2}}\to\frac{\frac{1}{6}+0}{(1+0)^{3/2}}=\frac{1}{6}$$

PROBLEMA 15

Hallar el valor único de la constante a tal que el límite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-e^{2x}-3x}{x^2}\right)$$

tiene un valor finito. Evaluar el límite con ese valor de a.

Solución

Si sustituimos $x=0$, para cualquier valor de la constante a obtenemos la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Aplicando la regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{2x}-3x}{x^2}$$

$$\stackrel{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}-2e^{2x}-3}{2x}$$

$$\to\frac{a-5}{0}$$

Para cualquier $a\neq 5$, el límite será $\pm\infty$.

Pero si $a=5$ obtenemos la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ dos veces y aplicamos la regla de L'Hospital dos veces.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{2x}-3x}{x^2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{5e^{5x}-2e^{2x}-3}{2x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{25e^{5x}-4e^{2x}}{2}$$

$$=\frac{21}{2}$$

PROBLEMA 16

La ecuación

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

implícitamente define dos funciones f y g (ver la figura abajo). Hallar el dominio y rango de cada

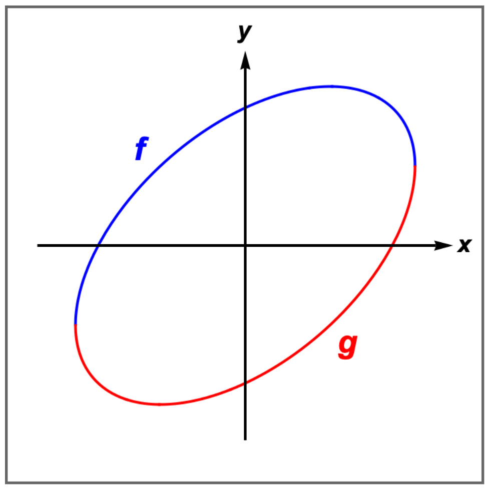

Figura 3: La elipse $x^2 - xy + y^2 = 1$

función. (Nota: la curva es una elipse. Ne se requiere hallar las funciones f and g explícitamente.)

Solución

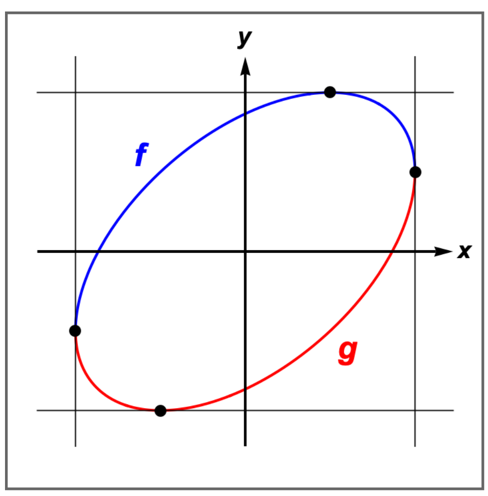

Figura 4: La elipse $x^2 - xy + y^2 = 1$ con los puntos extremos y rectas tangentes

En la figura arriba, vemos que los extremos de los dominios y rangos de f y g son las coordinadas de los puntos en la elipse en donde las rectas tangentes son horizontales (derivada es cero) o verticales (derivada es indefinida). Usando diferenciación implícita, obtenemos

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

Para determinar los puntos en donde las rectas tangentes son horizontales, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ x^2 - xy + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

por sustitución. Los puntos son

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{and} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Para determinar los puntos en donde las rectas tangentes son verticales, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ x^2 - xy + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

por sustitución. Los puntos son

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{and} \quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Por lo tanto:

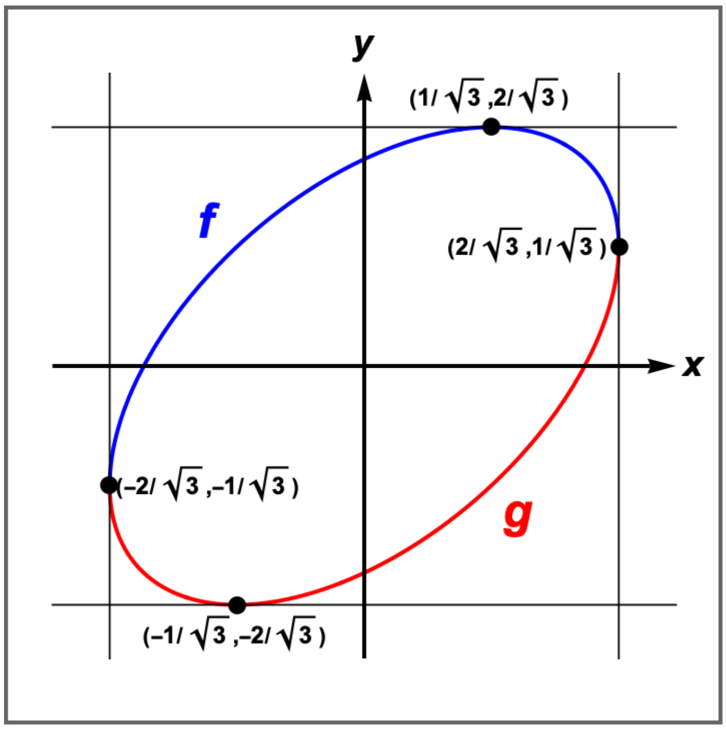

Figura 5: Coordenadas de los extremos

$$\text{Dominio(f)} = \text{Dominio(g)} = \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\text{Rango(f)} = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\text{Rango(g)} = \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

PROBLEMA 17

Hallar la ecuaciones de las rectas tangentes a esta elipse que pasan por el origen.

$$x^2 + 2y^2 - 4\sqrt{3}y + 4 = 0$$

Solución

Sea (a, b) el punto de la elipse en donde la recta tangente al la elipse en ese punto pasa por el origen. Entonces las coordinadas satisfacen la ecuación de la elipse

$$a^2 + 2b^2 - 4\sqrt{3}b + 4 = 0 \tag{1}$$

y la pendiente de la recta tangente es

$$m = \frac{b}{a} \tag{2}$$

Usando Diferenciación Implícita

$$y' = \frac{x}{2\sqrt{3} - 2y}$$

y por tanto en el punto (a, b) también tenemos

$$m = \frac{a}{2\sqrt{3} - 2b} \tag{3}$$

Igualando las ecuaciones (2) y (3) obtenemos

$$a^2 + 2b^2 - 2\sqrt{3}b = 0 \tag{4}$$

Así que el punto (a, b) satisface el sistema de ecuaciones simultáneas (1) y (4)

$$\begin{aligned} a^2 + 2b^2 - 4\sqrt{3}b + 4 &= 0 \\ a^2 + 2b^2 - 2\sqrt{3}b &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$(a, b) = \left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

Las pendientes de las rectas tangentes son:

$$m = \frac{b}{a} = \pm 1$$

y las ecuaciones de las rectas tangentes son

$$y = \pm x$$

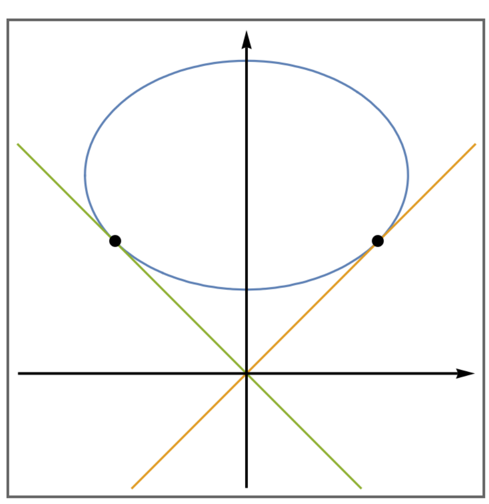

Figura 6: Elipse y rectas tangentes por el origen

PROBLEMA 18

Evaluar esta integral.

$$\int_0^{\pi/4} \left(\cos^4\theta - \sin^4\theta\right) d\theta$$

Solución

Como

$$\cos^4\theta - \sin^4\theta = \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = \cos 2\theta$$

tenemos

$$\int_0^{\pi/4} \left(\cos^4\theta - \sin^4\theta\right) d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \; d\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta \,\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$

PROBLEMA 19

Demostrar que si m and n son enteros distintos, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = 0$$

y si m y n son iguales, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx, dx = \pi$$

Solución

Si m y n son distintos, aplicamos la identidad trigonométrica

$$2 \sin u \sin v = \cos (u - v) - \cos (u + v)$$

y el hecho de que

$$\sin k\pi = 0 \qquad \text{for all integers k.}$$

Si m y n son iguales, aplicamos la identidad trigonométrica

$$2 \sin^2 u = 1 - \cos 2u$$

PROBLEMA 20

Evaluar esta integral definida.

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$$

Solución

Sustituimos

$$x = t^2, \quad dx = 2t\,dt$$

y obtenemos la integral transformada

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt$$

$$=2\int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\,dt$$

$$=2\left(t - \tan^{-1} t\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$=2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$

PROBLEMA 21

Usar la identidad

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\ dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\ dx$$

para evaluar la integral definida

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\ dx$$

Solución

Aplicando la identitad arriba y la sustitución

$$u = \cos x$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\ dx &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\ dx \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2}\ du \\ &= \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

PROBLEMA 22

Evaluar esta integral definida.

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{x}\,)\,dx$$

Solución

Sustituyendo $x = t^2$

$$= \int_0^1 2t \operatorname{sen}^{-1} t\,dt$$

Integrando por partes

$$= t^2 \operatorname{sen}^{-1} t \,\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Aplicamos la sustitución trigonométrica $t = \operatorname{sen}\theta$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\theta\right)\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

PROBLEMA 23

Dado

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{e^t - 1}\, dt$$

Evaluar

$$\lim_{x\to\infty} F(x)$$

Solución

Usando la sustitución $u = e^t - 1,\ du = e^t dt$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^t - 1}\, dt &= \int \frac{1}{u(u+1)}\, du \\
&= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du \\
&= \ln|u| - \ln|u+1| \\
&= \ln\left|\frac{u}{u+1}\right| \\
&= \ln\left|\frac{e^t - 1}{e^t}\right| \\
&= \ln|1 - e^{-t}| \\
&= \ln(1 - e^{-t})
\end{aligned}$$

Pudimos eliminar el valor absoluto porque $e^{-t} < 1$ para $t > 0$.

(Como alternativa, podemos multiplicar el numerador y el denominador por e^{-t} y luego sustituir $u = 1 - e^{-t}$.)
Por el Teorema Fundamental de Cálculo

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{e^t - 1}\, dt = \ln(1 - e^{-t})\Big|_1^x = \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-1}}\right)$$

Como $e^{-x} \to 0$ según $x \to \infty$,

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \ln\left(\frac{1}{1 - e^{-1}}\right) = \ln\left(\frac{e}{e-1}\right)$$

PROBLEMA 24

Evaluar esta integral definida.

$$\int_0^1 \frac{x^3 - 2x^2 - 2x}{x^4 + 4}\, dx$$

Solución

Completando el cuadrado y factorizando

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

Usando descomposición en fracciones parciales

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3 - 2x^2 - 2x}{x^4 + 4}\, dx &= \int_0^1 \frac{x^3 - 2x^2 - 2x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)}\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{x+1}{(x+1)^2 + 1}\, dx - \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2 + 1}\, dx \\ &= \int_1^2 \frac{u}{u^2 + 1}\, du - \int_{-1}^0 \frac{1}{v^2 + 1}\, dv \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

PROBLEMA 25

Sea

$$f(x) = \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

en donde a es una constante positiva. Hallar el área de la región R en el plano cartesiano en donde $f(x) \geq 0$.

Solución

Observamos que

$$f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\text{Area}(R) &= \int_{-a}^{a} \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}\, dx \\
&= \int_{-a}^{a} \left(-1 + \frac{2a^2}{a^2 + x^2}\right)\, dx \\
&= -x + 2a\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_{-a}^{a} \\
&= (\pi - 2)a
\end{aligned}$$

PROBLEMA 26

La Cúbica de Tschirnhausen, graficada abajo, tiene ecuación cartesiana

$$27ay^2 = x^2(9a - x)$$

en donde a es una constante positiva. Calcular el área del "lazo".

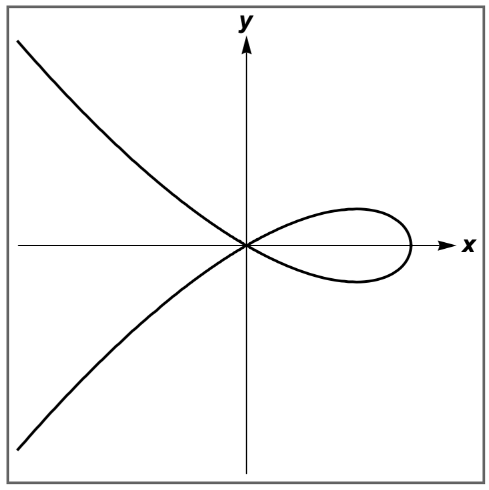

Figura 7: La Cúbica de Tschirnhausen

Solución

$$\text{Area} = 2\int_0^{9a} \sqrt{\frac{x^2(9a-x)}{27a}}\ dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{27a}}\int_0^{9a} x\sqrt{9a-x}\ dx$$

La sustitución $u = 9a - x$ transforma la integral en

$$\frac{2}{\sqrt{27a}}\int_0^{9a} (9au^{1/2} - u^{3/2})\ dx = \frac{72\sqrt{3}}{5}a^2$$

PROBLEMA 27

La Cisoide de Diocles graficada abajo (no a escala) tiene la ecuación Cartesiana

$$y^2(a-x) = x^3$$

La cisoide tiene una asíntota vertical en $x = a$. Calcular el área entre la cisoide y su asíntota.

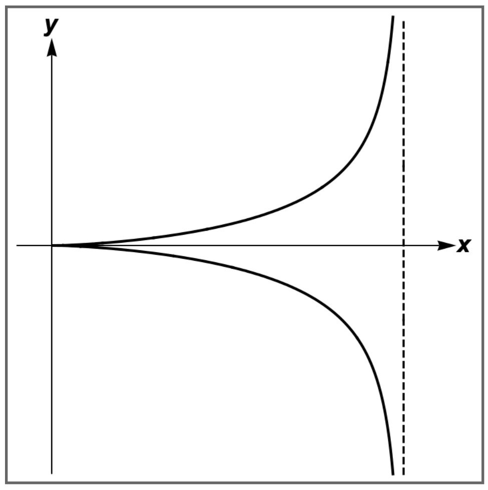

Figura 8: Cisoide de Diocles

Solución

El área está dada por la integral impropia

$$2\int_0^a \sqrt{\frac{x^3}{a-x}}\,dx$$

La sustitución $x = a\sin^2\theta$ transforma la integral en

$$4a^2\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\ d\theta$$

Usando las the identitades trigonométricas

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$
$$\cos^2 2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)$$

la integral se convierte en

$$a^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta\right)\ d\theta = \frac{3}{4}\pi a^2$$

PROBLEMA 28

La estrofoide graficada abajo tiene la ecuación paramétrica

$$y^2(a+x) = x^2(a-x)$$

Hallar el área del "lazo"(sombreado).

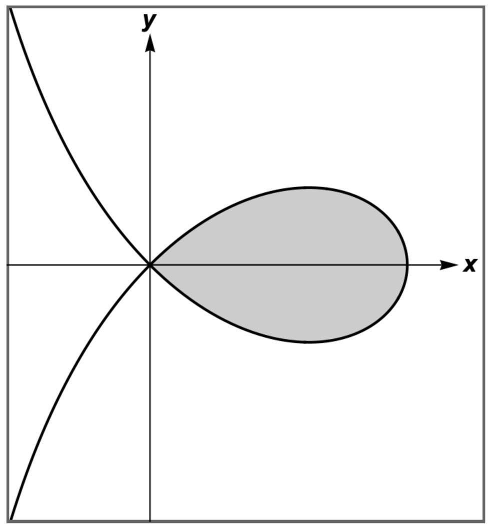

Figura 9: Estrofoide

Solución

$$\text{Area} = 2\int_0^a x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\ dx$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $a-x$ obtenemos

$$\text{Area} = 2\int_0^a x\frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ dx$$

La sustitución trigonométrica $x = a\sin\theta$ transforma la integral en

$$2a^2\int_0^{\pi/2}\left(\sin\theta - \sin^2\theta\right)\ d\theta = \frac{1}{2}(4-\pi)a^2$$

PROBLEMA 29

Sea

$$f(x) = e^{-x} \operatorname{sen}(\pi x)$$

En la gráfica abajo (no a escala) se muestran tres de las infinitas oscilaciones de la curva $y = f(x)$. Hallar el área total de la región entera entre el eje x y la curva $y = f(x)$.

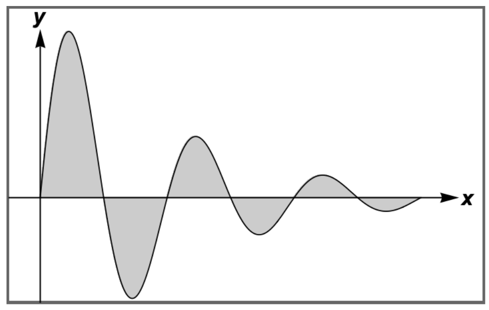

Figura 10: $y = f(x) = e^{-x} \operatorname{sen}(\pi x)$

Solución

Por integración por partes

$$\int f(x)\,dx = -\frac{1}{1+\pi^2}\frac{\pi\cos(\pi x) + \sin(\pi x)}{e^x}$$

El área of the k-ésima región es

$$\left|\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx\right| = \frac{(e+1)\pi}{1+\pi^2}\frac{1}{e^k}$$

La suma de las áreas de las regiones es dada por la serie geométrica

$$\frac{(e+1)\pi}{1+\pi^2}\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e^4} + \dots\right)$$

$$=\frac{(e+1)\pi}{1+\pi^2}\left(\frac{1}{e-1}\right)$$

$$=\left(\frac{e+1}{e-1}\right)\left(\frac{\pi}{1+\pi^2}\right)$$

PROBLEMA 30

Demostrar que esta serie converge absolutamente. Hallar la suma de la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$$

Solución

La serie converge por el Criterio del Cociente.

Para hallar la suma, recordamos la serie de Maclaurin

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \tan^{-1} x$$

y re-escribimos la serie dada en una forma conveniente

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} \\
=&\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \frac{1}{(\sqrt{3})^{2n}} \\
=&\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \frac{1}{(\sqrt{3})^{2n}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
=&\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \frac{1}{(\sqrt{3})^{2n+1}} \\
=&\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1} \\
=&\sqrt{3} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
=&\frac{\sqrt{3}}{6} \pi
\end{aligned}$$

PROBLEMA 31

Considera la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$$

(a) Hallar una fórmula en forma cerrada $f(N)$ para la N-ésima suma parcial

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$$

de la serie.

(b) Hallar la suma de la serie.

Solución

La descomposición en fracciones parciales del término general de la serie es

$$\frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Por lo tanto la N-ésima suma parcial es

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

Escribimos S_N en la forma

$$S_N = \left\{ \begin{array}{cccccccccccccc}
\frac{2}{1} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & & & & & & & & & & & \\
 & +\frac{2}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & & & & & & & & & & \\
 & & +\frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & & & & & & & & & \\
 & & & +\frac{2}{4} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & & & & & & & & \\
 & & & & +\frac{2}{5} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{7} & & & & & & & \\
 & & & & & +\frac{2}{6} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & & & & & & \\
 & & & & & & +\frac{2}{7} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{9} & & & & & \\
 & & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\
 & & & & & & & & & +\frac{2}{N-2} & -\frac{1}{N-1} & -\frac{1}{N} & & \\
 & & & & & & & & & & +\frac{2}{N-1} & -\frac{1}{N} & -\frac{1}{N+1} & \\
 & & & & & & & & & & & +\frac{2}{N} & -\frac{1}{N+1} & -\frac{1}{N+2}
\end{array} \right\}$$

y observamos que tenemos una serie telescópica en donde todos los términos se cancelan excepto tres al principio y tres al final

$$S_N = \frac{2}{1} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}$$

$$S_N = \frac{5}{2} - \frac{2}{N+1} - \frac{1}{N+2}$$

La suma de la serie es

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{5}{2}$$