SOLUCIONES
XXIII Competencia de Cálculo

Recinto Universitario de Mayagüez
Universidad de Puerto Rico

14 de marzo de 2024
Día de π

CÓDIGO DE ESTUDIANTE: ____________________
(Escribir el código solamente, no escriba su nombre.)

NO ESCRIBIR DEBAJO DE ESTA LINEA

Problema 1	/7
Problema 2	/7
Problema 3	/7
Problema 4	/7
Problema 5	/7
Problema 6	/10
Problema 7	/10
Problema 8	/10
Problema 9	/10
TOTAL	/75

PROBLEMA 1 (7 puntos)

Hallar el valor máximo y el valor mínimo de la función

$$f(x) = x^3 - 12x$$

en el intervalo

$$-3 \leq x \leq 3$$

Solución

Los puntos críticos son

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$3(x^2 - 4) = 0$$

$$3(x-2)(x+2) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad x + 2 = 0$$

$$x = 2 \quad x = -2$$

Comparando los valores de $f(x)$ en los puntos críticos y en los extremos del intervalo $-3 \leq x \leq 3$

x	$f(x)$
-3	9
-2	16
2	-16
3	-9

Valor máximo: $f(-2) = 16$

Valor mínimo: $f(2) = -16$

Gráfica (no requerida).

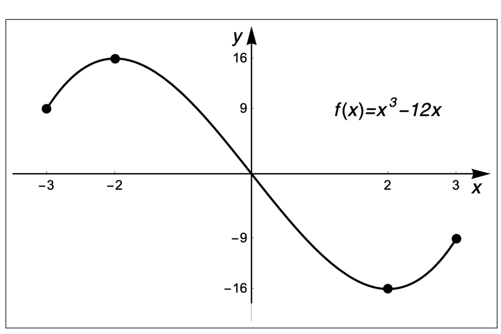

Figura 1: Max/Min Cúbica

PROBLEMA 2 (7 puntos)

Hallar el área de la región en el plano xy entre la parábola

$$y = 7x - x^2$$

y la recta

$$y = x$$

Trazar una gráfica de la región. Sombrear la región.

Solución

Igualamos para obtener los puntos de intersección. Estos serán los límites de integración.

$$7x - x^2 = x$$

$$6x - x^2 = 0$$

$$x(6 - x) = 0$$

$$x = 0, \quad x = 6$$

El área de la región es

$$Area = \int_0^6 \big((7x - x^2) - (x)\big)\ dx$$

$$= \int_0^6 \big(6x - x^2\big)\ dx$$

$$= \left(3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^6$$

$$= (3(6)^2 - \frac{1}{3}(6)^3) - (3(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3)$$

$$Area = 36$$

Gráfica de la región (REQUERIDA).

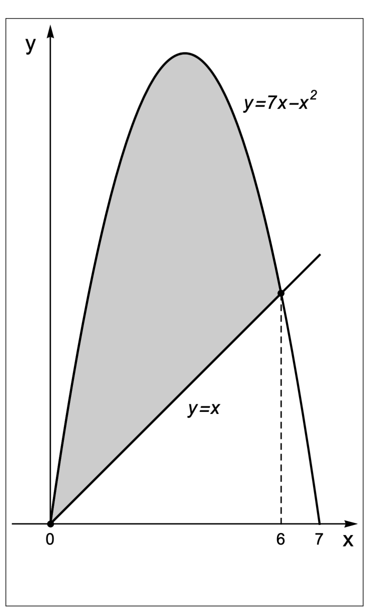

Figura 2: Región entre parábola y recta

PROBLEMA 3 (7 puntos)

Evaluar este límite.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - x - 1}{x \operatorname{sen} x}\right)$$

Solución

Aplicamos la regla de L'Hospital.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - x - 1}{x \operatorname{sen} x}\right) = \frac{0}{0} \qquad (Indeterminado)$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x - x - 1)'}{(x \operatorname{sen} x)'}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x}\right) = \frac{0}{0} \qquad (Indeterminado)$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x - 1)'}{(\operatorname{sen} x + x\cos x)'}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x}\right)$$

$$= \frac{e^0}{2\cos 0 - 0\operatorname{sen} 0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

PROBLEMA 4 (7 puntos)

Hallar el área máxima posible de un rectángulo inscrito entre el eje x, el eje y, y la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ como se muestra en la figura.

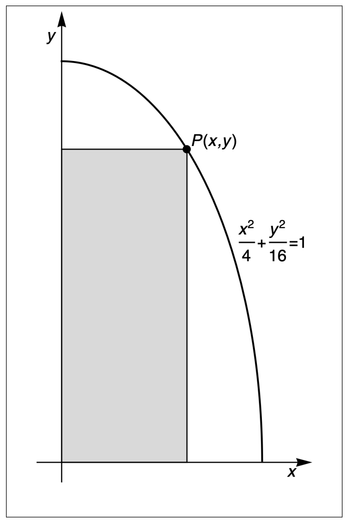

Figura 3: Rectángulo inscrito entre el eje x, eje y, y la elipse

Solución

Queremos el valor máximo de $A = xy$ sujeto a la restricción

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \implies y = 2\sqrt{4 - x^2}$$

Sustituyendo en la expresión para A obtenemos

$$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

Puntos críticos

$$A'(x) = 2\sqrt{4 - x^2} + 2x\frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

$$\sqrt{4 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$4 - x^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{2}$$

$$y = 2\sqrt{2}$$

$$A = xy = 4$$

El área máxima posible es $A_{max} = 4$ y se alcanza cuando el vértice del rectángulo está en el punto $P(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

PROBLEMA 5 (7 puntos)

Hallar los puntos críticos de esta función. Clasificar como máximo local o mínimo local.

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

Solución

Aplicamos la regla del producto para calcular $f'(x)$ y $f''(x)$.

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}(-2x)$$

$$f'(x) = (2x - 2x^3)e^{-x^2}$$

$$f''(x) = (2 - 6x^2)e^{-x^2} + (2x - 2x^3)e^{-x^2}(-2x)$$

$$f''(x) = (4x^4 - 10x^2 + 2)e^{-x^2}$$

Los puntos críticos en este caso son los ceros de $f'(x)$. Factorizamos $f'(x)$.

$$f'(x) = 2x(1 - x)(1 + x)e^{-x^2}$$

Los puntos críticos son

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1$$

Sustituimos en $f''(x)$ para clasificar los puntos críticos.

x	$f''(x)$	concavidad	clasificación
0	$2 > 0$	$\cup$	mínimo local
1	$-\frac{4}{e} < 0$	$\cap$	máximo local
-1	$-\frac{4}{e} < 0$	$\cap$	máximo local

Cuadro 1: Clasificación de los puntos críticos de $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

Gráfica de la función (no requerida).

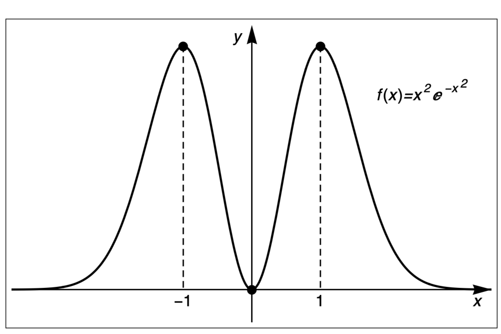

Figura 4: Puntos críticos de la función $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

PROBLEMA 6 (10 puntos)

Hallar la ecuación de la recta tangente a esta curva en $x = 1$.

$$y = \int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

Solución

Escribiendo

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

y aplicando el Teorema Fundamental de Cálculo,

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2)^2}\left(x^2\right)' = \frac{2x}{1+x^4}$$

y

$$f'(1) = \frac{2(1)}{1+1^4} = 1$$

Por otro lado

$$f(1) = \int_0^{1} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \left. \tan^{-1} t \right|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Ahora sustituimos en la ecuación de la recta tangente.

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$y = f(1) + f'(1)(x-1)$$

$$y = \frac{\pi}{4} + (1)(x-1)$$

$$y = x + \frac{\pi}{4} - 1$$

Alternativa

Evaluando la integral obtenemos uan ecuación explícita para la curva. Entonces procedemos como arriba.

$$y = \tan^{-1}\left(x^2\right)$$

Gráfica (no requerida).

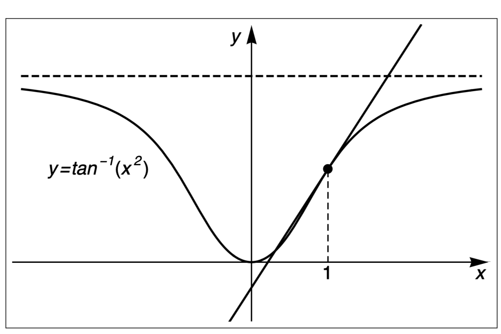

Figura 5: Gráfica de la curva $y = \tan^{-1}\left(x^2\right)$ con su recta tangente en $x = 1$.

PROBLEMA 7 (10 puntos)

Hallar las ecuaciones de las rectas por el origen y tangentes a la parábola

$$y = f(x) = 2x^2 + 8$$

Solución

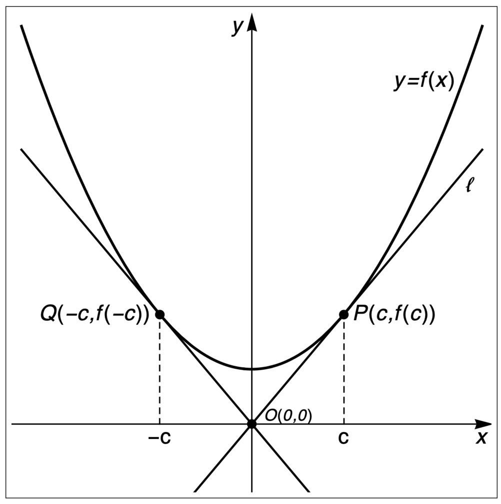

Figura 6: Rectas tangentes a una parábola

Necesitaremos $f'(x) = 4x$.
Como la recta ℓ es simultáneamente

1. tangente a la parábola en el punto $P(c, f(c))$, y
2. la recta determinada por los puntos $O(0, 0)$ y $P(c, f(c))$,

las pendientes m calculadas a base de estas dos condiciones serán iguales:

$$m = f'(c) = \frac{f(c) - 0}{c - 0}$$

$$m = 4c = \frac{2c^2 + 8}{c}$$

$$4c^2 = 2c^2 + 8$$

$$2c^2 = 8$$

$$c^2 = 4$$

$$c = 2$$

$$-c = -2$$

Las pendientes de las rectas son

$$m = \pm 4c = \pm 8$$

Como las rectas pasan por el origen, sus ecuaciones son

$$y = \pm 8x$$

PROBLEMA 8 (10 puntos)

Evaluar esta integral.

$$\int_e^{e^e} \frac{1}{x \ln x \cos^2(\ln(\ln x))}\,dx$$

Solución

Hacemos la sustitución

$$u = \ln(\ln x)$$

$$du = \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,dx = \frac{1}{x \ln x}\,dx$$

$$e \le x \le e^e \quad \Longrightarrow \quad 0 \le u \le 1$$

y obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_e^{e^e} \frac{1}{x \ln x \cos^2(\ln(\ln x))}\,dx \\
&= \int_e^{e^e} \frac{1}{\cos^2(\ln(\ln x))} \left(\frac{1}{x \ln x}\,dx\right) \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\cos^2 u}\,du \\
&= \int_0^1 \sec^2 u\,du \\
&= \tan u \Big|_0^1 \\
&= \tan 1
\end{aligned}$$

PROBLEMA 9 (10 puntos)

Evaluar este límite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\int_1^{n+1} \lfloor x \rfloor^2\, dx$$

La expresión $\lfloor y \rfloor$ es la función parte entera: Si la expansión decimal de $y \geq 0$ es $a.bcde\ldots$, entonces

$$\lfloor y \rfloor = \lfloor a.bcde\ldots \rfloor = a \qquad (a \geq 0)$$

(Otros nombres y símbolos: función piso, función entero mayor, $E(y)$, $Ent(y)$, $[y]$.)

Solución

Primero calculamos $\lfloor x \rfloor^2$.

$$k \leq x < k+1 \quad \Longrightarrow \quad \lfloor x \rfloor = k \quad \Longrightarrow \lfloor x \rfloor^2 = k^2 \qquad (k\,\text{entero})$$

Para poder evaluar la integral, la expresamos como la suma de integrales en intervalos de tipo

$$[k, k+1), \qquad k \text{ entero}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\int_1^{n+1} \lfloor x \rfloor^2\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \lfloor x \rfloor^2\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} k^2\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 x\Big|_k^{k+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2((k+1)-k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right) \\
&= \frac{1}{3}+0+0 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$