SOLUCIONES
XXIV Competencia de Cálculo

Recinto Universitario de Mayagüez
Universidad de Puerto Rico

14 de marzo de 2025
Día de π

Toda respuesta debe estar debidamente justificada
por un procedimiento matemático apropiado, completo, y coherente.

All answers must be fully justified
by an appropriate, complete, and coherent mathematical solution.

CÓDIGO DE ESTUDIANTE: / STUDENT CODE: ____________________
(Escribir el código solamente, no escriba su nombre.)
(Do not write your name, just the student code.)

NO ESCRIBIR DEBAJO DE ESTA LINEA
DO NOT WRITE BELOW THIS LINE.

Problema 1	/5
Problema 2	/5
Problema 3	/5
Problema 4	/5
Problema 5	/8
Problema 6	/8
Problema 7	/12
Problema 8	/12
TOTAL	/60

PROBLEMA 1 (5 puntos)

Hallar los puntos de inflexión de esta función.
Find the inflection points of this function.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$$

Solución

Calculamos la primera y segunda derivada.
We calculate the first and second derivatives.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x^2 + 16 \\ f'(x) &= 3x^2 - 12x \\ f''(x) &= 6x - 12 \end{aligned}$$

Igualando la segunda derivada a 0:
Equating the second derivative to 0:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 6x - 12 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Tenemos sólo un candidato en $x = 2$. Vemos que
There's only one candidate, $x = 2$. We see that

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 &\quad \text{si/if} \quad x < 2 \\ f''(x) = 0 &\quad \text{si/if} \quad x = 2 \\ f''(x) > 0 &\quad \text{si/if} \quad x > 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto
Therefore

$$\begin{aligned} f(x) \text{ es cóncava hacia abajo si/is concave down if } x < 2 \\ f(x) \text{ es cóncava hacia arriba si/is concave up if } x > 2 \\ f(x) \text{ cambia de concavidad en/changes concavity at } \ x = 2 \end{aligned}$$

Concluimos que $f(x)$ tiene solamente un punto de inflexión, en $x = 2$.
Evaluando en $x = 2$, obtenemos $f(2) = 0$.
Las coordenadas del punto de inflexión son $(2, 0)$.

We conclude that $f(x)$ has only one inflection point, at $x = 2$.
Evaluating at $x = 2$, we obtain $f(2) = 0$.
The coordinates of the inflection point are $(2, 0)$.

(No es necesario graficar. A graph isn't necessary.)

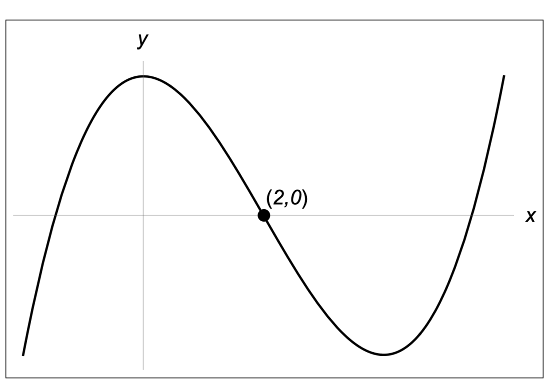

Figura 1: Punto de Inflexión/Inflection Point de/of $f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$

PROBLEMA 2 (5 puntos)

Evaluar este límite.
Evaluate this limit.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x)}{\tan(5x)}$$

Solución

Si intentamos sustitución, obtenemos una forma indeterminada.
If we try substitution, we obtain an indeterminate form.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x)}{\tan(5x)} = \frac{\tan 0}{\tan 0} = \frac{0}{0}$$

Por lo tanto, aplicamos la regla de L'Hospital.
Therefore, we apply L'Hospital's rule.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x)}{\tan(5x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\tan(3x))'}{(\tan(5x))'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3\sec^2(3x)}{5\sec^2(5x)}$$

$$= \frac{3\sec^2(0)}{5\sec^2(0)}$$

$$= \frac{3(1^2)}{5(1^2)}$$

$$= \frac{3}{5}$$

PROBLEMA 3 (5 puntos)

Evaluar esta integral.
Evaluate this integral.

$$\int_1^e \frac{x+1}{x}\,dx$$

Solución

$$\int_1^e \frac{x+1}{x}\,dx$$

$$= \int_1^e \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right)\,dx$$

$$= \int_1^e \left(1 + \frac{1}{x}\right)\,dx$$

$$= \left(x + \ln|x|\right)\Big|_1^e$$

$$= (e + \ln e) - (1 + \ln 1)$$

$$= (e + 1) - (1 + 0)$$

$$= e$$

PROBLEMA 4 (5 puntos)

Hallar la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $x = 0$.
Find the equation of the tangent line to this curve at the point $x = 0$.

$$y = \frac{3x+1}{2x+1}$$

Solución

La ecuación de la recta tangente es
The equation of the tangent line is

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) \tag{1}$$

Calculamos la derivada usando la regla del cociente.
Calculating the derivative using the quotient rule:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x+1}{2x+1} \\ f'(x) &= \frac{3(2x+1) - 2(3x+1)}{(2x+1)^2} \\ f'(x) &= \frac{1}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo, encontramos / Sunstituting, we find

$$f(0) = 1 \qquad \text{y/and} \qquad f'(0) = 1$$

Sustituyendo estos valores en (1), obtenemos la ecuación de la recta tangente.
Substituting these values in (1), we obtain the equation of the tangent line.

$$\begin{aligned} y &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ y &= f(0) + f'(0)(x-0) \\ y &= 1 + 1x \\ y &= 1 + x \end{aligned}$$

(No a escala. No es necesario trazar la gráfica. Not to scale. The graph isn't necessary.)

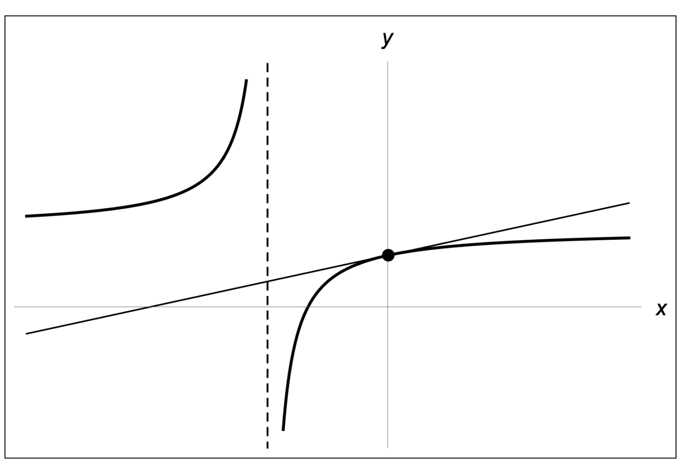

Figura 2: Recta tangente a la curva/Tangent line to the curve $y = \frac{3x+1}{2x+1}$ en/at $x = 0$

PROBLEMA 5 (8 puntos)

Hallar el valor máximo absoluto y el valor mínimo absoluto de la función
Find the absolute maximum and absolute minimum values of the function

$$f(x) = \cos x + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x$$

en el intervalo
on the interval

$$\left[0, \tfrac{5\pi}{6}\right]$$

Solución

Primero encontramos los puntos críticos de la función en el intervalo dado. Igualando la derivada a cero y descartando soluciones que no están en el intervalo dado, obtenemos solamente un punto crítico relevante.
We start by finding the critical points of the function on the given interval. We equate the derivative to zero and discard any solutions which aren't in the given interval. We find only one relevant critical point.

$$f'(x) = 0$$

$$-\,\mathrm{sen}\,x + \sqrt{3}\cos x = 0$$

$$\tan x = \sqrt{3}$$

$$x = \tfrac{\pi}{3}$$

Comparamos los valores de la función en el punto crítico y los extremos del intervalo.
Comparing the values of the function at the critical point and the endpoints of the given interval:

x	$f(x)$	*clasificación*
0	1	–
$\pi/3$	2	*max abs*
$5\pi/6$	0	*min abs*

(No es necesario trazar la gráfica. (The graph isn't necessary.))

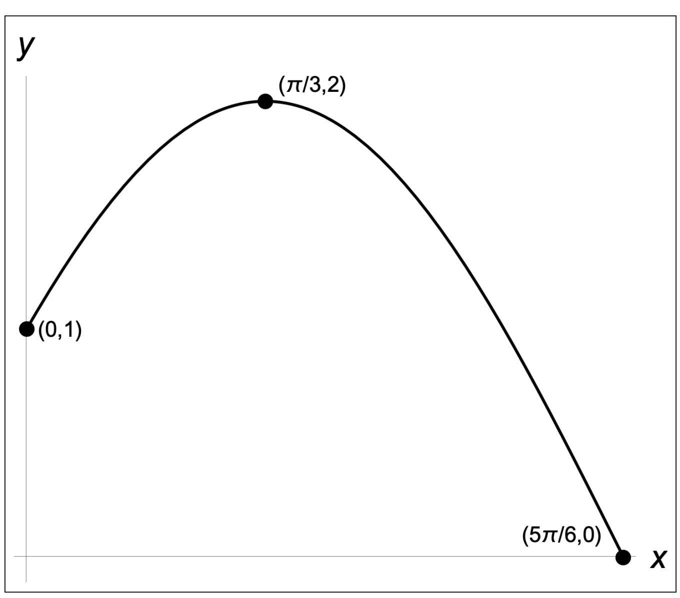

Figura 3: max abs y min abs de $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x$, $0 \le x \le 5\pi/6$

PROBLEMA 6 (8 puntos)

El área de la región encerrada por estas parábolas es 1. Hallar el valor de a.
The area of the region enclosed by these parabolas is 1. Find the value of a.

$$y = x^2 \qquad \text{y / and} \qquad y = x(2a - x) \qquad (a > 0)$$

Solución

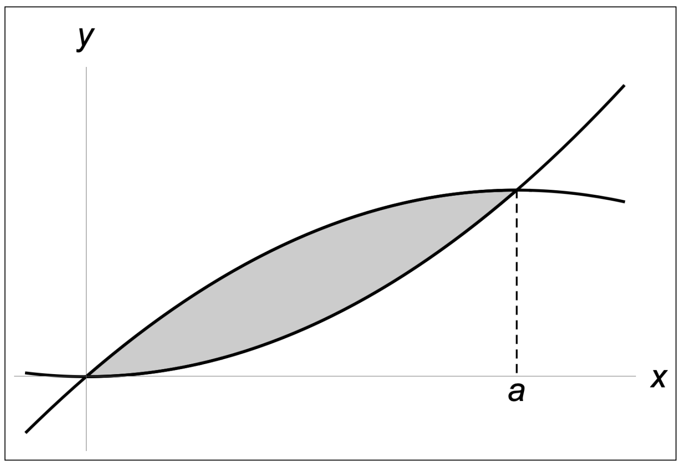

Figura 4: Parábolas $y = x^2$ y $y = x(2a - x)$ $(a > 0)$

Los puntos de intersección de las parábolas son
The points of intersection of the parabolas are

$$(0, 0) \quad \text{y} \quad (a, a^2)$$

El área de la región es
The area of the region is

$$A = \int_0^a \left(x(2a - x) - x^2 \right)\, dx$$

$$= \int_0^a (2ax - 2x^2)\, dx$$

$$= \left(ax^2 - \tfrac{2}{3}x^3 \right)\Big|_0^a$$

$$A = \tfrac{1}{3}a^3$$

Resolviendo por a.
Solving for a.

$$A = 1$$

$$\tfrac{1}{3}a^3 = 1$$

$$a = 3^{1/3}$$

PROBLEMA 7 (12 puntos)

Hallar el punto de esta curva más cercano al origen, y la distancia del punto al origen.
Find the point on this curve that is closest to the origin, and the distance of the point to the origin.

$$x\sqrt{y} = 4, \quad x > 0$$

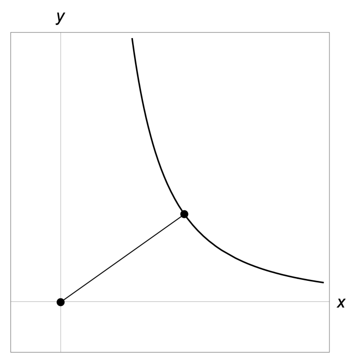

Figura 5: Curva $\quad x\sqrt{y} = 4$

Solución

Como $y = 16x^{-2}$, los puntos de la curva son de la forma
Since $y = 16x^{-2}$, the points on the curve are of the form

$$\left(x, 16x^{-2}\right)$$

La distancia de estos puntos al origen es / The distance from these points to the origin is

$$d(x) = \sqrt{x^2 + 256x^{-4}}$$

Punto critico de esta función / We find the critical points of this function.

$$\begin{aligned}
d'(x) &= 0 \\
\frac{2x - 1024x^{-5}}{2\sqrt{x^2 + 256x^{-4}}} &= 0 \\
x - 512x^{-5} &= 0 \\
x^6 &= 512 \\
x^6 &= 2^9 \\
x &= 2^{3/2} \\
x &= \sqrt{8} \\
y &= \frac{16}{(\sqrt{8})^2} \\
y &= 2
\end{aligned}$$

Sólo hay un punto crítico: / There is only one critical point: $\left(\sqrt{8}, 2\right)$.
Observamos que / We observe that

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^4}} \to \infty \qquad \text{si/if} \quad x \to 0 \quad \text{y si/and if} \quad x \to \infty$$

Por lo tanto el punto critico es un ***mínimo***. / Therefore, the critical point is a ***minimum***.
El punto de la curva más cercano al origen es / The point on the curve that is closest to the origin is

$$\left(\sqrt{8}, 2\right)$$

La distancia mínima es / The minimum distance is

$$d_{min} = \sqrt{(\sqrt{8})^2 + 2^2} = \sqrt{12}$$

PROBLEMA 8 (12 puntos)

Supongamos que una bola esférica de nieve se derrite de modo que su volumen disminuye a un ritmo proporcional a su área de superficie. Si la bola de nieve tarda tres horas en disminuir a un octavo de su volumen original, ¿cuánto tiempo más tardará la bola de nieve en derretirse por completo?

Assume that a snowball melts so that its volume decreases at a rate proportional to its surface area. If it takes three hours for the snowball to decrease to one eighth its original volume, how much longer will it take for the snowball to melt completely?

Solución

Sea r el radio de la bola de nieve. Entonces el volumen y el área de la superficie de la bola son
Let r be the radius of the snowball. Then the volume and surface area of the snowball are

$$\begin{aligned} V(r) &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \text{volumen de la bola de nieve} \\ S(r) &= 4\pi r^2 = \text{área de superficie de la bola de nieve} \end{aligned}$$

Nos dan que / We are given that

$$\frac{dV}{dt} = -kS, \quad k \text{ constante}, \quad k > 0$$

Por otro lado, aplicando la regla de la cadena
On the other hand, by applying the chain rule we know that

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = S\frac{dr}{dt}$$

Por lo tanto / Therefore

$$S\frac{dr}{dt} = -kS$$

y concluimos que / and we conclude that

$$\frac{dr}{dt} = -k$$

Como r tiene razón de cambio constante, r es una función lineal de tiempo t. Escribiendo $r_0 = r(0)$, tenemos
Since r has a constant rate of change, r is a linear function of time t. Writing $r_0 = r(0)$, we have

$$r = r_0 - kt$$

Entonces el volumen como función de tiempo t es dado por
Therefore, the volume as a function of time t is given by

$$V = V(t) = \tfrac{4}{3}\pi(r_0 - kt)^3$$

y observamos que / and we observe that

$$V = 0 \quad \text{cuando / when} \quad t = \frac{r_0}{k}, \quad \text{o sea, / that is,} \quad V\left(\tfrac{r_0}{k}\right) = 0$$

También nos dicen que / We are also told that

$$\begin{aligned} V(3) &= \tfrac{1}{8}V(0) \\ \tfrac{4}{3}\pi(r_0 - 3k)^3 &= \tfrac{1}{8}(\tfrac{4}{3}\pi r_0^3) \\ (r_0 - 3k)^3 &= \tfrac{1}{8}r_0^3 \\ r_0 - 3k &= \tfrac{1}{2}r_0 \\ r_0 &= 6k \\ t &= \frac{r_0}{k} = 6 \end{aligned}$$

(Continúa en la próxima página. / Continues next page.)

Therefore

$$V(6) = 0$$

Por lo tanto, la bola de nieve se tarda tres horas adicionales en derretirse, o sea seis horas en total.
Therefore, the snowball melts completely in three more hours, for a total of six hours.

Alternativa al final: Sustituyendo $r_0 = 6k$ en $V(t)$, obtenemos
Alternative to the last few steps: Substituting $r_0 = 6k$ in $V(t)$, we obtain

$$\begin{aligned}
V(t) &= \tfrac{4}{3}\pi(r_0 - kt)^3 \\
V(t) &= \tfrac{4}{3}\pi(6k - kt)^3 \\
V(t) &= \tfrac{4}{3}k^3\pi(6 - t)^3 \\
V(6) &= 0
\end{aligned}$$