

Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM
Copa Eugene A. Francis 2024

7. Ten students are randomly seated in a row of 10 chairs. Luis wants to sit next to Juan, but Betty doesn't want to sit next to Vilma. What is the probability that, when seated randomly, the above requirements are met?

7. Diez estudiantes son sentados al azar en una fila de 10 sillas. Luis quiere sentarse al lado de Juan, pero Betty no quiere sentarse al lado de Vilma. ¿Cuál es la probabilidad que, al ser sentados al azar, los requerimientos anteriores se cumplan?

Solución

El número de arreglos, sin ninguna restricción es : $10!$

El número de arreglos, requiriendo que Luis y Juan se sienten uno al lado del otro es : $(\# \text{ arreglos de bloques externos})(\# \text{ arreglos del bloque compuesto}) = 9!2!$

El número de arreglos, con Luis y Juan juntos y Betty y Vilma juntas =
 $(\# \text{ arreglos de bloques externos})(\# \text{ arreglos del bloque compuesto 1})$
 $(\# \text{ arreglos del bloque compuesto 2}) = 8!2!2!$

El número de arreglos, con Luis y Juan juntos y Betty y Vilma separadas =
El número de arreglos, con Luis y Juan juntos –
El número de arreglos, con Luis y Juan juntos y Betty y Vilma juntas

El número de arreglos, con Luis y Juan juntos y Betty y Vilma separadas
 $= 9!2! - 8!2!2! = 14(8!)$

La probabilidad que, al ser sentados al azar, los requerimientos anteriores se cumplan $= \frac{14(8!)}{10!} = \frac{14(8!)}{10 \times 9 \times 8!} = \frac{14}{90} = \frac{7}{45}$

Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM
Copa Eugene A. Francis 2024

5. Find the units digit of the following number $2^{2024} + 3^{2024} + 5^{2024}$

5. Determine el dígito de las unidades del siguiente número $2^{2024} + 3^{2024} + 5^{2024}$

Solución

Se sabe que las potencias de 2 finalizan en 4 números distintos los cuales son :
2, 4, 8 y 6, para determinar el valor de las unidades de 2^{2024} , se divide 2024 entre
la cantidad de posibilidades, y como 2024 es divisible por 4, i.e, el dígito
de las unidades para 2^{2024} es 6.

Análogamente sucede con 3^{2024} , pues las potencias de 3 terminan en 4 dígitos distintos
3, 9, 7 y 1, por ello, se concluye que 3^{2024} posee a 1 como dígito de las unidades.

Es trivial determinar que todas las potencias tienen como dígito de las unidades a 5.
Así mismo, 5^{2024} termina en 5.

Al realizar la suma de estos 3 elementos nada más debemos sumar los dígitos de las unidades
obteniendo : $2^{2024} + 3^{2024} + 5^{2024} = \dots, 6 + \dots, 1 + \dots, 5 = \dots, 2$

Con esto concluimos que el dígito de la unidad es del número $2^{2024} + 3^{2024} + 5^{2024}$ es 2.

Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM
Copa Eugene A. Francis 2024

1. Suppose that α , β and γ are positive numbers such that :

$$\alpha + \beta + \gamma = 27$$

$$\alpha + \gamma = 20$$

$$\beta + \gamma = 17$$

Find the values of α , β and γ .

1. Suponga que α , β y γ son números positivos tal que :

$$\alpha + \beta + \gamma = 27$$

$$\alpha + \gamma = 20$$

$$\beta + \gamma = 17$$

Halle los valores de α , β y γ .

Solución

$$\alpha + \beta + \gamma = 27 \quad (1)$$

$$\alpha + \gamma = 20 \quad (2)$$

$$\beta + \gamma = 17 \quad (3)$$

De (1) y (2) eliminamos α y γ , y se obtiene :

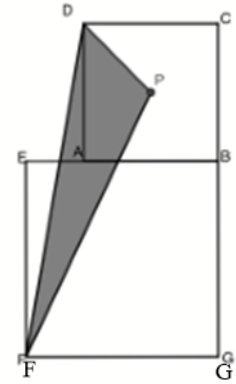
$\beta = 7$, sustituyendo en (3), obtenemos $\gamma = 10$

y luego sustituyendo en (2), se obtiene $\alpha = 10$

Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM
Copa Eugene A. Francis 2024

9. The diagonals of the squares $ABCD$ and $EFGB$ measure 14 cm and 20 cm, respectively. The point P is the intersection of the diagonals of the square $ABCD$. What is the area of the triangle FPD shown in the figure?

9. Las diagonales de los cuadrados $ABCD$ y $EFGB$ miden 14 cm y 20 cm, respectivamente. El punto P es la intersección de las diagonales del cuadrado $ABCD$. ¿Cuál es el área el triángulo FPD que se muestra en la figura?



Solución

La diagonal DB del cuadrado $ABCD$ biseca al $\angle CBA$, por lo tanto la medida del $\angle DBA$ es 45° .

Luego se traza la diagonal FB del cuadrado $EFGB$ biseca al $\angle EBG$, por lo tanto la medida del $\angle EBF$ es 45° .

Observe que se forma el $\angle DBF$, cuya medida es :
 $\angle DBF = \angle DBA + \angle EBF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

Como P es la intersección de las diagonales del cuadrado $ABCD$, lo que implica que es el punto medio del segmento DB , por lo tanto, $DP = PB$.

Como $DB = DP + PB = 14$, entonces $DP = 7$.

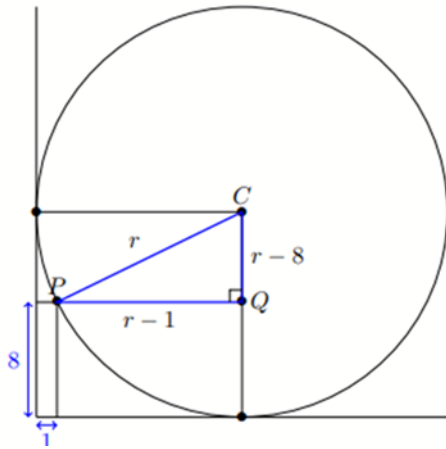
Para calcular el área del $\triangle FPD$, se usa al segmento DP como su base y el segmento BF como su altura, porque $BF \perp DB$, por lo tanto :

$$\text{Area } \triangle FPD = \frac{DP \cdot BF}{2} = \frac{7 \cdot 20}{2} = 70 \text{ cm}^2.$$

Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM
Copa Eugene A. Francis 2024

4. Suppose that a circle is tangent to two perpendicular lines so that a 1×8 rectangle can be placed between the perpendicular lines and the circle as is shown in the figure, find the radius of the circle.

4. Suponga que un círculo es tangente a dos líneas perpendiculares tal que el rectángulo 1×8 se coloca entre las líneas perpendiculares y el círculo como se muestra en la figura, halle el radio del círculo



Solución

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo CQP, se obtiene :

$(r-1)^2 + (r-8)^2 = r^2$, ($r > 8$) desarrollando los cuadrados se obtiene :

$$r^2 - 2r + 1 + r^2 - 16r + 64 = r^2$$

simplificando obtenemos : $r^2 - 18r + 65 = 0$, factorizando

$(r-5)(r-13) = 0 \Rightarrow r = 5$ ó $r = 13$, como $r > 8$, entonces el radio del círculo es 13

Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM
Copa Eugene A. Francis 2024

3. Let f be a function with the following properties :

i. $f(1) = 1$ and

ii. $f(2n) = nf(n)$ for any positive integer n

What is the value of $f(2^{10})$?

3. Sea f una function con las siguientes propiedades :

i. $f(1) = 1$ y

ii. $f(2n) = nf(n)$ para cualquier entero positivo n

Cuál es el valor de $f(2^{10})$?

Solución

Usando la propiedad ii :

$$\begin{aligned} f(2^{10}) &= f(2 \cdot 2^9) \\ &= 2^9 f(2^9) \\ &= 2^9 f(2 \cdot 2^8) \\ &= 2^9 \cdot 2^8 f(2^8) \\ &= 2^{9+8} f(2 \cdot 2^7) \\ &= 2^{9+8} \cdot 2^7 f(2^7) \\ &= 2^{9+8+7} f(2^7) \\ &\vdots \\ &= 2^{9+8+7+\cdots+1+0} f(2^0) \\ &= 2^{9+8+7+\cdots+1+0} \cdot 1 \\ &= 2^{\frac{9 \cdot 10}{2}} = 2^{45} \end{aligned}$$

Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM
Copa Eugene A. Francis 2024

6. Five predictions were made about the soccer match between team A and team B :
- i. The match will not end in a draw.
 - ii. A's team will score.
 - iii. A's team will win
 - iv. A's team will not lose
 - v. 3 goals will be scored.

It is known that exactly 3 of the predictions were true. What was the result of the meeting between A and B?

6. Se hicieron cinco predicciones sobre un partido de fútbol entre los equipos A y B :
- i. El partido no terminará en empate
 - ii. El equipo A anotará
 - iii. El equipo A ganará
 - iv. El equipo A no perderá
 - v. Se anotarán 3 goles

Se sabe que tres de las predicciones son ciertas.Cuál fue el resultado del encuentro entre los equipos A y B?

Solución

Analizando las distintas posibilidades de acuerdo si el equipo A gana, empata o pierde.

Si A gana, entonces son ciertas i, ii, iii, y iv, lo cual no es posible.

Si A empata, las únicas que pueden ser ciertas son ii y iv.

La conclusión es que el equipo A perderá. Se tiene tres afirmaciones que se cumplen, i, ii y v.

Entonces se anotarán tres goles y como A perdió pero si anotó, el resultado fue equipo B 2 y equipo A 1.

Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM
Copa Eugene A. Francis 2024

2. Let's define a new operation $\otimes$ on integers where it is only allowed to multiply evens with evens and odds with odds, but an odd cannot be multiplied with an even.
Forexample : $12 = 2 \otimes 6$, but it is not possible to write 12 as $3 \otimes 4$, since 3 is odd and 4 is even.
 $96 = 12 \otimes 8$ but it is not possible to write 96 as $3 \otimes 32$, since 3 is odd and 32 is even.
 $63 = 9 \otimes 7 = 3 \otimes 3 \otimes 7$
Based on this new type of product, find the largest possible common factor between 36 and 48.

2. Definamos una nueva operación $\otimes$ sobre los enteros donde solo se permite multiplicar los pares con pares y los impares con impares, pero no se puede multiplicar un impar con un par. Por ejemplo :
 $12 = 2 \otimes 6$, pero no es posible escribir a 12 como $3 \otimes 4$, pues el 3 es impar y 4 es par.
 $96 = 12 \otimes 8$ pero no es posible escribir a 96 como $3 \otimes 32$, pues el 3 es impar y 32 es par.
 $63 = 9 \otimes 7 = 3 \otimes 3 \otimes 7$
Basado con este nuevo tipo de producto, hallar el factor común más grande posible entre 36 y 48.

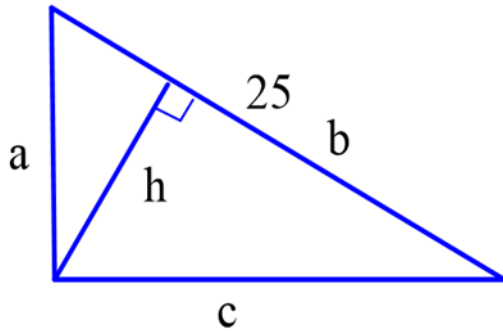
Solución

Las únicas maneras de factorizar al 36 y 48 en enteros positivos
(los negativos no nos interesan pues estamos buscando el factor más grande posible)
con respecto a este nuevo producto, deben respetar el que los factores sean pares.
Con esto solo hay las siguientes factorizaciones (salvo reorden) :
 $36 = 6 \otimes 6$ y $36 = 2 \otimes 18$
 $48 = 2 \otimes 24 = 4 \otimes 12 = 2 \otimes 2 \otimes 12 = 6 \otimes 8 = 2 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 6 = 4 \otimes 2 \otimes 6$
Por ende, el factor más grande en común es el 6.

Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM
Copa Eugene A. Francis 2024

8. In a right triangle, the sum of the lengths of the heights is 47 and the hypotenuse measures 25. Find the length of the lowest height.

8. En un triángulo rectángulo, la suma de las longitudes de las alturas es 47 y la hipotenusa mide 25. Halle la longitud de la altura menor.



Solución

Dado que las alturas del triángulo son a, c, h donde h es la menor.

Se tiene que $a + c + h = 47$ y la hipotenusa $b = 25$

De la primera ecuación se obtiene $(a + c)^2 = (47 - h)^2$

Entonces : $a^2 + c^2 + 2ac = (47 - h)^2$, como $a^2 + c^2 = 25^2$ y $ac = 25h$, se obtiene :

$$25^2 + 2(25h) = (47 - h)^2 \Rightarrow 25^2 + 50h = 47^2 - 94h + h^2$$

$$\Rightarrow h^2 - 144h + 2206 - 625 = h^2 - 144h + 1584 = (h - 12)(h - 132) = 0$$

$$\Rightarrow h = 12 \text{ ó } h = 132 \quad (h < 25)$$

Por lo tanto la altura más pequeña es $h = 12$

Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM
Copa Eugene A. Francis 2024

10. Solve $\sqrt{\frac{3x-2}{2x-5}} + 3\sqrt{\frac{2x-5}{3x-2}} = 4$

10. Resolver $\sqrt{\frac{3x-2}{2x-5}} + 3\sqrt{\frac{2x-5}{3x-2}} = 4$

Solución

$$\text{Sea } z = \sqrt{\frac{3x-2}{2x-5}} \Rightarrow \frac{1}{z} = \sqrt{\frac{2x-5}{3x-2}},$$

sustituyendo en la ecuación se obtiene $z + \frac{3}{z} = 4$,

asumiendo $z \neq 0$, se obtiene $z^2 - 4z + 3 = 0$, factorizando :

$$(z-3)(z-1) = 0 \Rightarrow z = 3 \text{ ó } z = 1$$

Luego se resuelve :

$$3 = \sqrt{\frac{3x-2}{2x-5}} \Rightarrow 9 = \frac{3x-2}{2x-5} \Rightarrow 9(2x-5) = 3x-2$$

$$\Rightarrow 18x - 3x = 45 - 2 \Rightarrow x = \frac{43}{15}$$

De manera similar :

$$1 = \sqrt{\frac{2x-5}{3x-2}} \Rightarrow 1 = \frac{2x-5}{3x-2} \Rightarrow 3x-2 = 2x-5$$

cuya solución es $x = -3$