

**Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayaguez
Departamento de Ciencias
Matemáticas**

**IX Competencia de Precálculo
14 de marzo de 2024**

Identificación: _____

Solución

1. Expresar en notación de intervalo el dominio de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-5}$

Solución

$$\text{dom}(\sqrt{x-2}) = \{x \in \mathbb{R} | x-2 \geq 0\} = [2, \infty)$$

$$\begin{aligned} \text{dom}(f(x)) &= \text{dom}(\sqrt{x-2}) - \{x | x-5 = 0\} \\ &= [2, \infty) - \{5\} = [2, 5) \cup (5, \infty) \end{aligned}$$

2. Dada la función $f(x) = (x^2 - 1)(2x + 4)(3 - x)$:

a. Halle los ceros de $f(x)$

b. Trace la gráfica de $f(x)$

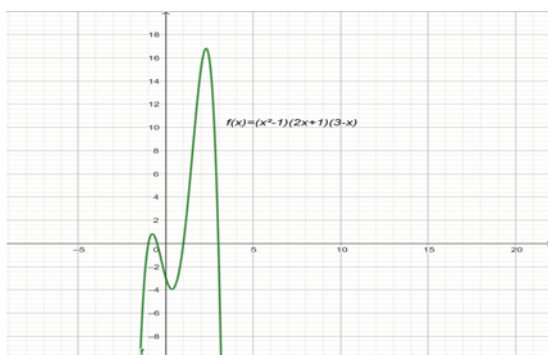
Solución

a. Los ceros de la función están dados por los valores reales que hacen cero el valor de la función, como

$$f(x) = (x^2 - 1)(2x + 4)(3 - x) = (x - 1)(x + 1)(2x + 4)(3 - x)$$

entonces los ceros de la función son: $x = -1$, $x = -1/2$, $x = 1$, $x = 3$

b. El grado de la función polinómica es 4, su coeficiente principal es negativo, por lo tanto la gráfica empieza en el tercer cuadrante y termina en el cuarto cuadrante. Su gráfica corta al eje X en $x = -1$, $x = -1/2$, $x = 1$ y $x = 3$



3. El producto de tres números enteros impares consecutivos reducido por 23 es 99 menos que el cubo de la suma del menor y 2. Calcule el promedio de estos tres números.

Solución

Sea x un número entero impar y considere los tres enteros consecutivos $x - 2, x, x + 2$

Se tiene que: $(x - 2)x(x + 2) - 23 = (x - 2 + 2)^3 - 99$

Resolviendo:

$$x^3 - 4x - 23 = x^3 - 99 \Rightarrow -4x = -76 \Rightarrow x = 19$$

Los números impares son 17, 19 y 21, y el promedio de los números impares es:

$$\frac{17 + 19 + 21}{3} = 19$$

4. Halle la solución de la ecuación $3 + 3\cos x = 2\sin^2 x$, en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Solución

Usando la identidad $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ se tiene:

$3 + 3\cos x = 2 - 2\cos^2 x$, una ecuación cuadrática:

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \text{ factorizando}$$

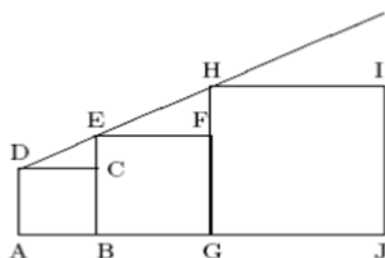
$$(2\cos x + 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \\ \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \end{array} \right\}, n \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$, son: $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \pi$, $x = \frac{4\pi}{3}$

5. Tres cuadrados adyacentes descansan sobre el eje de X . Por una esquina de cada cuadrado pasa una línea, como se muestra en la Figura. Los lados de los dos cuadrados más pequeños miden 4 cm y 6 cm respectivamente. Determine el área del triángulo EFH



Las coordenadas de los puntos D y E son $(0, 4)$ y $(4, 6)$, respectivamente.

La pendiente de la recta que pasa por los puntos D y F es $\frac{1}{2}$ y su ecuación, es :

$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

Para determinar las coordenadas del punto H sustituimos x por 10 y se obtiene $(10, 9)$.

El lado EF mide 6 cm y el lado FH mide 3 cm, por lo tanto el área del triángulo EFH es : $\frac{1}{2}(6)(3) = 9 \text{ cm}^2$

6. Determine los valores de n , donde n es un número natural, para los cuales la expresión $n^3 - 8n^2 + 20n - 13$ es un número primo.

Solución

Observe que $n^3 - 8n^2 + 20n - 13 = (n - 1)(n^2 - 7n + 13)$

Por lo tanto necesitamos determinar los valores de n para los cuales uno de los factores es 1 y el otro es un número primo.

Casos :

a. si $n - 1 = 1 \Rightarrow n = 2$ y el otro factor es $2^2 - 14 + 13 = 3$

b. si $n^2 - 7n + 13 = 1 \Rightarrow n^2 - 7n + 12 = (n - 3)(n - 4) = 0 \Rightarrow n = 3 \wedge n = 4$, en cuyo caso el otro factor primo es 2 y 3, respectivamente.

Por lo tanto los valores que puede tomar n : $n = 2, n = 3, n = 4$

7. La siguiente función $f : [a, 8] \rightarrow [b, b + 2]$, $a > 0$, definida por $f(x) = \log_2 x$ es sobreyectiva, hallar $a + b$

Solución

$\text{dom}(f) = [a, 8]$, $a > 0 \Rightarrow a \leq x \leq 8$, aplicando $\log_2$, se obtiene :

$$\log_2 a \leq \log_2 x \leq \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

Además por ser sobreyectiva :

$$\text{rango}(f) = [b, b + 2] \Rightarrow \log_2 a = b \wedge 3 = b + 2$$

de la segunda ecuación se obtiene que $b = 1$,

$$\text{entonces } \log_2 a = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{Por lo tanto : } a + b = 2 + 1 = 3$$