

**Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Departamento de Ciencias
Matemáticas**

**X Competencia de Precálculo
14 de marzo de 2025**

Identificación: _____

1. Si $f(x) = \frac{2}{x-1}$ y $g(x) = 3x$, resuelva la ecuación $f(g(x)) = g(f(x))$.

1. If $f(x) = \frac{2}{x-1}$ and $g(x) = 3x$, solve the equation $f(g(x)) = g(f(x))$.

Solución

Se halla las composiciones :

$$f(g(x)) = f(3x) = \frac{2}{3x-1} \quad \text{y} \quad g(f(x)) = g\left(\frac{2}{x-1}\right) = 3\left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{6}{x-1}$$

igualando ambas expresiones :

$$\frac{2}{3x-1} = \frac{6}{x-1} \Rightarrow 2(x-1) = 6(3x-1) \Rightarrow 2x-2 = 18x-6$$

$$\Rightarrow 16x = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}.$$

2. Si las gráficas de las rectas $4x - \sqrt{a}y = 12$ y $2ax + 4y = 9$ son perpendiculares. ¿Cuál es un posible valor de a ?

2. The graphs of the two lines $4x - \sqrt{a}y = 12$ and $2ax + 4y = 9$ are perpendicular. What is a possible value of a ?

Solución

Si las rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es -1 .

La pendiente de la recta $4x - \sqrt{a}y = 12$ es $m_1 = \frac{4}{\sqrt{a}}$.

La pendiente de la recta $2ax + 4y = 9$ es $m_2 = -\frac{2a}{4} = -\frac{a}{2}$.

Resolviendo la ecuación $m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \left(\frac{4}{\sqrt{a}}\right)\left(-\frac{a}{2}\right) = -1$

$\Rightarrow -\frac{2a}{\sqrt{a}} = -1 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$.

3. Una función polinómica de grado dos satisface que :

$$f(x) \geq 1 \text{ para toda } x$$

$$f(2) = 1, f(3) = 3$$

Determine $f(5)$.

3. A polynomial function of degree two satisfies :

$$f(x) \geq 1 \text{ for all } x$$

$$f(2) = 1, f(3) = 3$$

Find $f(5)$.

Solución

Como $f(x) \geq 1$ para toda x , y $f(2) = 1$, la gráfica corresponde a una parábola con vértice $(2, 1)$ y $f(x)$ tiene la forma :

$$f(x) = a(x - 2)^2 + 1$$

para hallar el valor de a , se usa el dato $f(3) = 3$ y se obtiene :

$$f(3) = a(3 - 2)^2 + 1 = 3 \Rightarrow a + 1 = 3 \Rightarrow a = 2.$$

$$\text{Por lo tanto } f(x) = 2(x - 2)^2 + 1 \text{ y}$$

$$f(5) = 2(5 - 2)^2 + 1 = 19.$$

4. Resuelva la ecuación $\log_2(\sin(2x)) + \log_2(\tan(x)) = -\log 10$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

4. Solve the equation $\log_2(\sin(2x)) + \log_2(\tan(x)) = -\log 10$ in the interval $[0, \pi/2]$.

Solución

Aplicando leyes de logaritmos e identidades trigonométricas se tiene :

$$\begin{aligned}\log_2(\sin(2x)) + \log_2(\tan(x)) &= \log_2(2\sin(x)\cos(x)) \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) \\ &= \log_2(2\sin^2(x)) = -1 = -\log_2(2) = \log_2(2^{-1}) \\ \Rightarrow 2\sin^2(x) &= 2^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2(x) = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \sin(x) &= \pm \frac{1}{2} \\ \Rightarrow x &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

5. Halle el valor de k para que la ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ represente un círculo de radio 7.

5. Find the value of k such that the equation $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ represents a circle with radius 7.

Solución

Reordenando y completando cuadrados, se tiene :

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 10y + 25 + k = 16 + 25$$

$$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 41 - k$$

Se debe cumplir que $41 - k = 7^2 \Rightarrow k = 41 - 49 = -8$.

El valor de k para el cual la ecuación representa un círculo de radio 7 es -8 .

6. Halle el valor de x si el determinante $\begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & c+x & x \\ x & x & x & d+x \end{vmatrix} = 0$.

6. Find the value of x if the determinant $\begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & c+x & x \\ x & x & x & d+x \end{vmatrix} = 0$.

Solución

Restando a las tres primeras columnas la última, se tendrá :

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & x \\ 0 & b & 0 & x \\ 0 & 0 & c & x \\ -d & -d & -d & d+x \end{vmatrix} = 0$$

Luego utilizando menores complementarios y tomando como referencia la primera columna, se tiene :

$$a \begin{vmatrix} b & 0 & x \\ 0 & c & x \\ -d & -d & d+x \end{vmatrix} - (-d) \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ b & 0 & x \\ 0 & c & x \end{vmatrix} = 0$$

Luego calculando los determinantes por menores complementarios, se tiene :

$$a \left(b \begin{vmatrix} c & x \\ -d & d+x \end{vmatrix} - (-d) \begin{vmatrix} 0 & x \\ c & x \end{vmatrix} \right) + d(-b) \begin{vmatrix} 0 & x \\ c & x \end{vmatrix} = 0$$

$$a(b(c(d+x) + dx)) + d(0 - cx) - bd(0 - cx) = 0$$

$$abcd + abcx + abdx - acdx + bcdx = 0$$

Luego resolviendo para x se obtiene :

$$x = -\frac{abcd}{abc + abd - acd + bcd}$$

7. Dada la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} = \left\{2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \dots\right\}$, halle a_{20}

7. Given the sequence $\{a_n\}_{n \geq 1} = \left\{2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \dots\right\}$, find a_{20}

Solución

Para :

$$n = 1 : a_1 = \frac{2}{1}$$

$$n = 2 : a_2 = \frac{9}{4} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$n = 3 : a_3 = \frac{64}{27} = \frac{4^3}{3^3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$n = 4 : a_4 = \frac{625}{256} = \frac{5^4}{4^4} = \left(\frac{5}{4}\right)^4$$

Entonces se puede ver el patrón : $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, por lo tanto :

$$a_{20} = \left(\frac{21}{20}\right)^{21}$$

8. Dada la función $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2x}-1} - \frac{1}{\sqrt{2x}+1}\right)$:

a. halle $\text{dom}(f)$

b. trace la gráfica de $f(x)$

8. Given the function $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2x}-1} - \frac{1}{\sqrt{2x}+1}\right)$:

a. find $\text{dom}(f)$

b. graph $f(x)$

Solución

$$\text{dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\sqrt{2x}-1} - \frac{1}{\sqrt{2x}+1} > 0\right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x}-1} - \frac{1}{\sqrt{2x}+1} = \frac{\sqrt{2x}+1 - (\sqrt{2x}-1)}{2x-1} = \frac{2}{2x-1}$$

$$\text{dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{2x-1} > 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x-1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1/2\}$$

La gráfica de la función es decreciente, tiene una asíntota vertical, $x = 1/2$.

Además su intercepto con el eje x , se obtiene al resolver la ecuación :

$$\frac{2}{2x-1} = 1 \Rightarrow 2x-1 = 2 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = 3/2.$$

