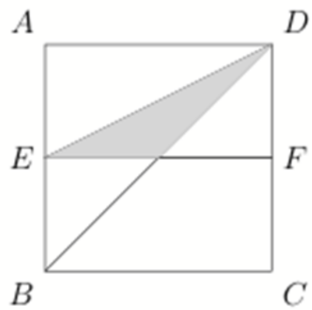
Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM
Copa Eugene A. Francis XXV
Cuatro minutos

1. *In the figure, ABCD is a square, E and F are de middle points of AB and CD, respectively, and $AB = 1$. Find the area of the shaded region.*

1. *En la figura, ABCD es un cuadrado, E y F son los puntos medios de AB y CD, respectivamente, y $AB = 1$. Halle el área de la región sombreada.*



Solución

Se observa que tanto la base como la altura del triángulo sombreado miden $\frac{1}{2}$, *por lo tanto el área es :*

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM

Copa Eugene A. Francis XXV

Cuatro minutos

5. *There are nine members of a student governance committee, with two boys and seven girls as members. The group's adviser wants to take a delegation to a national convention. The delegation must be five or six students and must include at least one boy. How many ways are there to select the delegation?*

5. *Hay nueve miembros en un comité de gobierno estudiantil, con dos chicos y siete chicas como miembros. El asesor del grupo quiere llevar una delegación a una convención nacional. La delegación debe estar compuesta por cinco o seis estudiantes y debe incluir al menos un chico. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar la delegación?*

Solución

Las maneras en que se puede seleccionar la delegación son :

$$\#\,(\textit{delegación de } 5 \textit{ con al menos un chico}) + \#(\textit{delegación de } 6 \textit{ con al menos un chico})$$
$$= \#\,(\textit{delegación de } 5) - \#(\textit{delegación de con todas chicas}) + \#(\textit{delegación de } 6)$$
$$- \#(\textit{delegación de con todas chicas})$$
$$= C(9,5) - C(7,5) + C(9,6) - C(7,6)$$
$$= \frac{9!}{5!4!} - \frac{7!}{5!2!} - \frac{9!}{6!3!} - \frac{7!}{6!1!}$$
$$= 126 - 21 + 87 - 7$$
$$= 182$$

Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM
Copa Eugene A. Francis XXV
Cinco minutos

9. $Solve\ for\ x:\ 2^x \cdot 3^{x^2} = 6.$

$Resuelva\ para\ x:\ 2^x \cdot 3^{x^2} = 6.$

$Solución$

$Dividiendo\ ambos\ lados\ por\ 6:$

$$\frac{2^x \cdot 3^{x^2}}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} \Longrightarrow 2^{x-1} \cdot 3^{x^2-1} = 1$$

$Aplicando\ logarítmo\ natural\ a\ ambos\ lados:$

$$ln\left(2^{x-1} \cdot 3^{x^2-1}\right) = ln(1) \Longrightarrow (x-1)ln2 + (x^2-1)ln3 = 0$$

$Factorizando\ se\ obtiene:$

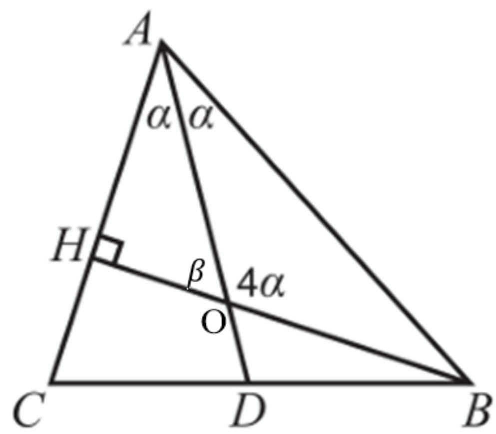
$$(x-1)ln2 + (x-1)(x+1)ln3 = (x-1)(ln2 + (x+1)ln3) = 0$$

$$\Longrightarrow x - 1 = 0 \quad ó \quad ln2 + (x+1)ln3 = 0$$

$$\Longrightarrow x = 1 \quad ó \qquad x = -1 - \frac{ln2}{ln3}$$

6. *In the triangle ABC of the figure, the segment BH is a height and the angles* $\angle CAD$ *and* $\angle DAB$ *have the same measure. The greatest angle between AD and BH measures 4 times angle* $\angle DAB$*, as identified in the figure. What is the measure of the angle* $\angle CAB$*?*

6. *En el triángulo ABC de la figura, el segmento BH es una altura y los ángulos* $\angle CAD$ *y* $\angle DAB$ *miden lo mismo. El ángulo mayor entre AD y BH mide 4 veces lo que el ángulo* $\angle DAB$*, así como se ha identificado en la figura. ¿Cuál es la medida del ángulo* $\angle CAB$*?*



Solución

Sea O la intersección de AD y BH, y sea β *el ángulo* $\angle HOA$*, de donde se tiene que* $\beta = 180° - 4\alpha$. (1)

Además de la gráfica se tiene que $\beta = 90° - \alpha$. (2)

De las ecuaciones (1) *y* (2) *se obtiene la ecuación* :

$$180° - 4\alpha = 90° - \alpha \Longrightarrow 3\alpha = 90° \Longrightarrow \alpha = 30°.$$

Por lo tanto, la medida del ángulo $\angle CAB$ *es de* $30°$.

Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM

Copa Eugene A. Francis XXV

Cinco minutos

7. *Suppose that* f *is a function such that* $f(x) = 1 - f(x-1)$ *for any real number* x. *Prove that* $f(n) = f(-n)$ *for every positive integer* n.

7. *Suponga que* f *es una función tal que* : $f(x) = 1 - f(x-1)$ *para cualquier número real* x. *Demuestre que* $f(n) = f(-n)$ *para todo entero positivo* n.

Solución

La demostración se hará usando Inducción Matemática. Considere primero el caso $n = 1$:

$$f(1) = 1 - f(1-1)$$
$$= 1 - f(0)$$
$$f(0) = 1 - f(0-1)$$
$$= 1 - f(-1)$$

Por lo tanto :

$$f(1) = 1 - f(0) = 1 - [1 - f(-1)] = 1 - 1 + f(-1) = f(-1)$$

Suponga ahora que el enunciado es cierto para $n = k$, *es decir, que* $f(k) = f(-k)$.

Entonces :

$$f(k+1) = 1 - f(k+1-1) = 1 - f(k) = 1 - f(-k) \text{ (Hipótesis inductiva)}$$

Pero, $f(-k) = 1 - f(-k-1)$

Por lo tanto :

$$f(k+1) = 1 - f(-k) = 1 - [1 - f(-k-1)] = f(-k-1) = f(-(k+1))$$

2. $Verify\ the\ trigonometric\ identity$

$$(csc(x) - cot(x))^2 = \frac{1 - cos(x)}{1 + csc(x)}$$

2. $Verifique\ la\ identidad\ trigonométrica$

$$(csc(x) - cot(x))^2 = \frac{1 - cos(x)}{1 + csc(x)}$$

$Solución$

$Se\ trabaja\ desde\ el\ lado\ izquierda\ de\ la\ igualdad,\ entonces:$

$$\begin{aligned}
(csc(x) - cot(x))^2 &= \left(\frac{1}{sin(x)} - \frac{cos(x)}{sin(x)}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1 - cos(x)}{sin(x)}\right)^2 \\
&= \frac{(1 - cos(x))^2}{sin^2 x}\ (usando\ la\ identidad\ sin^2 x = \ 1 - cos^2(x)\ ) \\
&= \frac{(1 - cos(x))^2}{1 - cos^2(x)} \\
&= \frac{(1 - cos(x))^2}{(1 - cos(x))(1 + cos(x))} \\
&= \frac{1 - cos(x)}{1 + cos(x)}
\end{aligned}$$

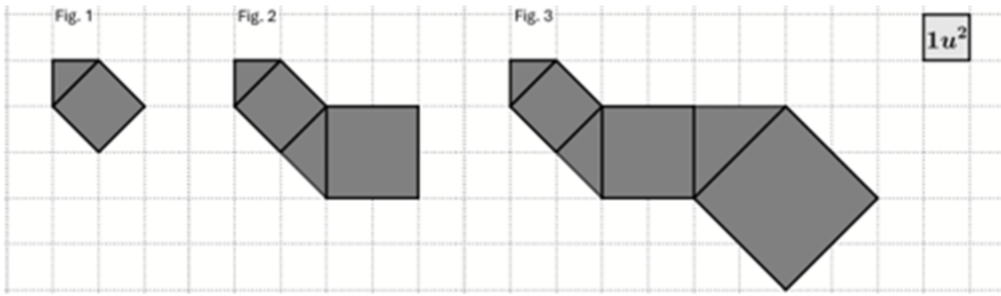
Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM

Copa Eugene A. Francis XXV

Cuatro minutos

3. *Observe the geometric pattern, calculate the area of each figure, and set up an expression to calculate the area of the $n-th$ figure.*

3. *Observa el patrón geométrico, calcula el área de cada figura y establezca una expresión para calcular el área de la figura $n-$ésima.*



Solución

Se divide cada figura en triángulos de área $\frac{1}{2}\ u^2$, *se tiene* :

Figura	*Cantidad de mitades*	*Area*
1	$(1+4)=5$	$5(2^1-1)\left(\frac{1}{2}\right)=5\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}\ u^2$
2	$(1+4)+(2+8)=15$	$5(2^2-1)\left(\frac{1}{2}\right)=15\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}\ u^2$
3	$(1+4)+(2+8)+(4+16)=35$	$5(2^3-1)\left(\frac{1}{2}\right)=35\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{35}{2}\ u^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n		$5(2^n-1)\left(\frac{1}{2}\right)u^2$

Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM
Copa Eugene A. Francis XXV
Cuatro minutos

4. *Find the least positive integer n such that* $\left(2^{50}+3^{n-1}\right)^2-1$ *is a multiple of* 7. *Justify.*

4. *Halle el entero positivo menor n tal que* $\left(2^{50}+3^{n-1}\right)^2-1$ *es un múltiplo de* 7. *Justifique.*

Solución

$2 \equiv 2 \ (mod\ 7) \Longrightarrow 2^2 \equiv 4 \ (mod\ 7) \quad \Longrightarrow 2^3 \equiv 8 \equiv 1 \ (mod\ 7)$

$\Longrightarrow \left(2^3\right)^{16} \equiv 1 \ (mod\ 7) \quad \Longrightarrow 2^{48} \cdot 2^2 \equiv 2^2 \ (mod\ 7)$

Por lo tanto : $2^{50} \equiv 4 \ (mod\ 7)$

Sustituyendo los valores de n *en la expresión* $\left(2^{50}+3^{n-1}\right)^2-1$ *se obtiene que ésta es congruente al valor* x *en lo siguiente :*

n	x
1	3
2	6
3	0

Por lo tanto, el entero positivo menor es : $n = 3$.

8. *Factorize the expression* $M(x) = x^5 + x + 1.$

8. *Factorice la expresión* $M(x) = x^5 + x + 1.$

Solución

Se suma y resta x^2 :

$$\begin{aligned} M(x) &= x^5 + x + 1 + x^2 - x^2, \ \ agrupando \\ &= x^5 - x^2 + x^2 + x + 1, \ \ factorizando \\ &= x^2(x^3 - 1) + x^2 + x + 1, \ \ factorizando \\ &= x^2(x-1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1), \ factor\ común \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2(x-1) + 1), \ \ simplificando \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) \end{aligned}$$

Departamento de Ciencias Matemáticas - RUM
Copa Eugene A. Francis XXV
Cinco minutos

$10. \, Solve \; \log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + \log_3{}^2 x = 1$

$10. \, Resolver \; \log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + \log_3{}^2 x = 1$

Solución

Reescribiendo el primer logarítmo con base 3 :

$$\frac{\log_3(3/x)}{\log_3(3x)} = 1 - \log_3{}^2 x$$

$$\Longrightarrow \; \frac{\log_3 3 - \log_3 x}{\log_3 3 + \log_3 x} = (1 - \log_3 x)(1 + \log_3 x)$$

$$\Longrightarrow 1 - \log_3 x = (1 - \log_3 x)(1 + \log_3 x)^2$$

$$\Longrightarrow 1 - \log_3 x - (1 - \log_3 x)(1 + \log_3 x)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow (1 - \log_3 x)\left(1 - (1 + \log_3 x)^2\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 - \log_3 x = 0 \\ 1 - (1 + \log_3 x) \quad = 0 \\ 1 + (1 + \log_3 x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \log_3 x = 0 \Longrightarrow x = 1 \\ \log_3 x = -2 \Longrightarrow x = 3^{-2} = 1/9 \end{cases}$$